Branimir Dakić
Neven Elezović

MATEMATIKA 4

udžbenik i zbirka zadataka
za 4. razred prirodoslovno-
-matematičke gimnazije
1. dio

ELEMENT

Udžbenik je odobren rješenjem Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.
(Klasa: UP/ I-602-09/ 14-01/ 00014, Ur. broj: 533-26-14-0002 od 15. svibnja 2014.)

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu
Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 875727.

ISBN 978-953-197-842-2 (cjelina)
ISBN 978-953-197-843-9 (Dio 1)

Branimir Dakić
Neven Elezović

MATEMATIKA 4

udžbenik i zbirka zadataka
za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije

1. dio

1. izdanje

Zagreb, 2014.

Urednica
Sandra Gračan, dipl. ing.

Recenzenti
Željka Frković, prof.
prof. dr. sc. Ljubo Marangunić

Lektorica
Dunja Apostolovski, prof.

Crteži, slog i prijelom
ELEMENT d.o.o., Zagreb

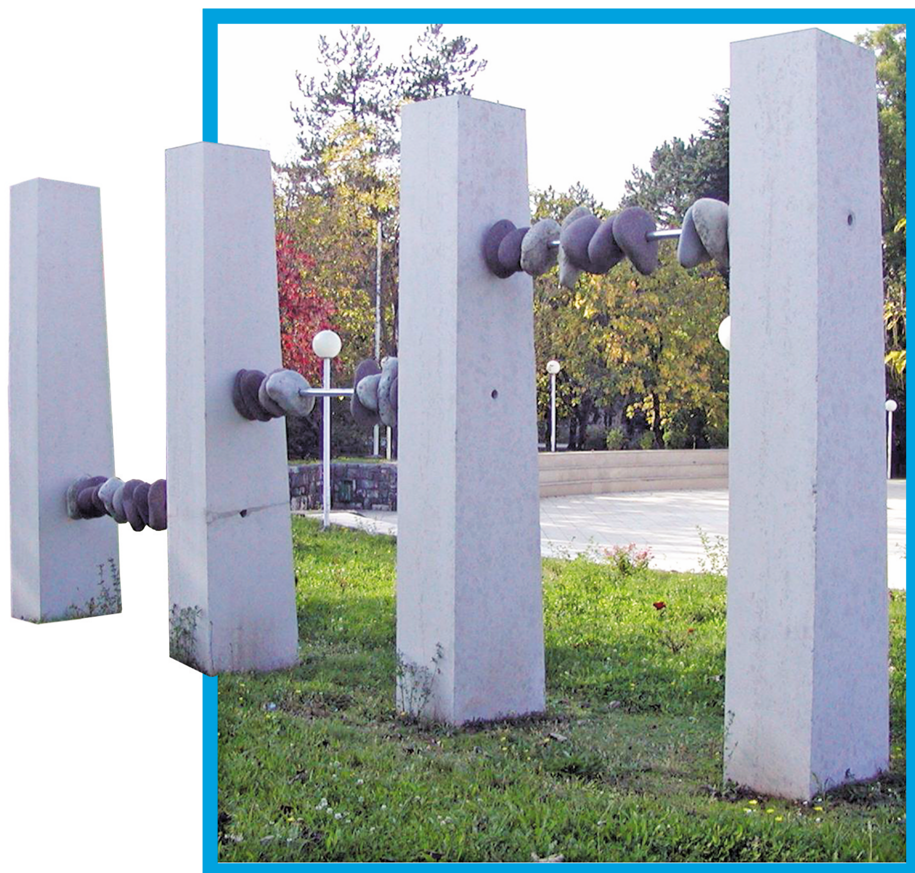
Dizajn
Edo Kadić

Nakladnik
ELEMENT d.o.o., Zagreb, Menčetićeva 2
tel. 01/ 6008-700, 01/ 6008-701
faks 01/ 6008-799
www.element.hr
element@element.hr

Tisak
TISKARA ZELINA d.d., Sveti Ivan Zelina

Sadržaj

1 Brojevi



Broj je osnovni pojam matematike. Tijekom dosadašnjeg školovanja upoznali smo temeljna svojstva skupa prirodnih brojeva **N**, *cijelih brojeva* **Z**, *racionalnih* **Q**, *realnih* **R** *i kompleksnih brojeva* **C**. *Svakako najjednostavniji među njima je skup prirodnih brojeva. Na početku ovog poglavlja istaknut ćemo neka dodatna svojstva ovog skupa. Pokazat ćemo zatim kako se krenuvši od skupa* **N** *dobivaju složeniji skupovi brojeva. Detaljnije ćemo obraditi svojstva realnih brojeva, jer se na njima zasniva matematička analiza, disciplina koju ćemo proučavati u nastavku, kao i svojstva kompleksnih brojeva, zbog njihove važnosti u primjenama.*

1.1. Brojevni sustavi

Pozicijski zapis brojeva

Način na koji mi danas zapisujemo brojeve ima dvije bitne karakteristike. To je **pozicijski zapis**, koji koristi **deset** različitih znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Što karakterizira pozicijski zapis? Vrijednost znamenke nije određena samo njezinim iznosom, već i *mjestom* u zapisu broja na kojemu se ona nalazi. Svako mjesto u zapisu broja ima svoju *težinu*, koja se povećava deset puta za svaki pomak znamenke ulijevo: u broju 237 znamenka 7 je znamenka **jedinica** koja vrijedi 7, znamenka 3 je znamenka **desetica** koja vrijedi 30 (trideset) jedinica, a 2 je znamenka **stotica** koja vrijedi 200 (dvije stotine) jedinica.

Za nekog tko slabije prebrojava kažemo da "broji na prste". Međutim, činjenica da osoba ima *deset* prstiju upravo je i odredila način našeg brojenja: veće brojeve iskazujemo s pomoću potencija broja deset. Tako, primjerice, broj tri stotine dvadeset šest prikazujemo s pomoću potencija broja 10 ovako:

$$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$$

i taj broj zapisujemo kratko kao 326, pazeći na *položaj* svake znamenke u ovom zapisu. Broj 35 206 možemo napisati ovako:

$$35\,206 = 3 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 6 = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6.$$

Općenito, višeznamenkasti broj N zapisujemo kao $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Vrijednost tog broja je

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Njegove znamenke $a_n, \ldots, a_1, a_0$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Za broj kažemo da je zapisan u **dekadskom sustavu** ili **sustavu s bazom 10**.



Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji drugi prirodni broj veći od 1.

Zapis broja u sustavu s bazom b

Neka je $b > 1$ prirodan broj. Prirodni broj N zapisan u pozicijskom sustavu s bazom b ima vrijednost:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Ovdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ znamenke broja N. To su cijeli brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ (pritom je $a_n \neq 0$). Indeks (b) označava u kojoj je bazi zapisan broj.

Tako, primjerice, $152_{(8)}$ predstavlja broj zapisan u sustavu s bazom 8. Koji je to broj u dekadskom sustavu? Računajmo ovako:

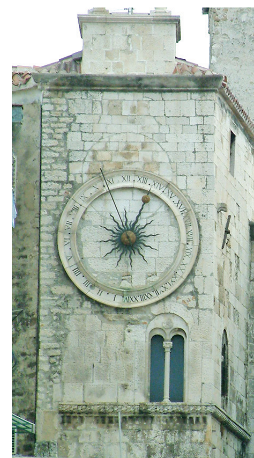
$$152_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 2 = 64 + 40 + 2 = 106_{(10)}.$$

Po dogovoru, brojeve u dekadskom sustavu pisat ćemo bez oznake baze: $106_{(10)} = 106$.



Povijesni kutak

ZAPISIVANJE BROJEVA



Prirodne brojeve danas zapisujemo na ovaj način: 1, 2, $3 \ldots$ Zapis broja ne smijemo poistovjetiti sa samim brojem, jer se isti broj može zapisivati na različite načine.

Rimljani su u tu svrhu rabili slova svoje latinične abecede. Slova I, V, X, L, C, D, M označavala su redom brojeve 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Njihovim kombiniranjem možemo zapisati višeznamenkaste brojeve: MCMXCVI predstavlja broj 1996, dok se 1886 piše MDCCCLXXXVI. Očito je ovakav način zapisivanja pogodan samo za zapis broja, a nikako i za računanje s takvim brojevima (Kako pomnožiti XCVI s DCCXLI?).

Sličan sustav zapisivanja brojeva koristio se i u drugim kulturama. Grci su za oznaku brojeva koristili početno slovo odgovarajuće riječi pa su brojeve 1, 5, 10, 100, 1000, 10000 označavali s I, Π, Δ, H, X, M. Vidi detalje na *web*-stranici `en.wikipedia.org/wiki/Numeral_systems`.

Takav se sustav koristio i kod nas u doba uporabe glagoljice. Praktički je svako slovo glagoljice imalo i svoju numeričku vrijednost. Da slovo predstavlja broj upozoravao je kvadratić ispred njega, ili vitica zapisana iznad slova.

Brojevi na ručnoj uri označavaju se vrlo često rimskim znamenkama, od I do XII, kao i mjeseci u kalendaru.

Sat na splitskoj pjaci ima brojčanik s 24 rimskim slovima označena sata, baš kao i ovaj prvi električki pokretani sat ispred muzeja u Greenwichu (postavljen 1852 godine).



Ostatke duodecimalnog sustava (s bazom 12) nalazimo još i danas. Jaja se još uvijek (ali sve manje!) prodaju u **tucetima**, dok **gros** predstavlja tucet tuceta, broj 100 u bazi 12.

Englezi su do 1971. godine funtu dijelili na 12 šilinga, a šiling na 20 penija. Jedna je funta sadržavala dakle 240 penija. Takav je sustav pogodan za dijeljenje, jer je 12 djeljivo s 2, 3, 4 i 6. Inflacija je olakšala prijelaz na dekadski sustav.

Babilonci su od Sumerana naslijedili i razvili **heksagezimalni** sustav (s bazom 60). Ostatke tog sustava zadržali smo u podjeli sata (i kutova) na minute te minute na sekunde.

U načinu izgovaranja brojeva u francuskom jeziku naziremo utjecaj i drugih sustava, *quatre vingt onze* označava broj 91, četiri (puta) dvadeset (plus) jedanaest!

Primjer 1. Koji brojevi u dekadskom sustavu odgovaraju brojevima $3216_{(12)}$, $3216_{(8)}$, $10010011_{(2)}$, $234_{(5)}$?

$$\begin{aligned}
3216_{(12)} &= 3\cdot 12^3 + 2\cdot 12^2 + 1\cdot 12 + 6 = 5490,\\
3216_{(8)} &= 3\cdot 8^3 + 2\cdot 8^2 + 1\cdot 8 + 6 = 1678,\\
10010011_{(2)} &= 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2 + 1 = 147,\\
234_{(5)} &= 2\cdot 5^2 + 3\cdot 5 + 4 = 69.
\end{aligned}$$

Zadatak 1. Koji brojevi u dekadskom sustavu odgovaraju brojevima $321_{(4)}$, $321_{(12)}$, $555_{(6)}$, $101101_{(2)}$?

Primjer 2. Niz uzastopnih prirodnih brojeva zapisan je ovako:

$$1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101 \ldots$$

U kojem se brojevnom sustavu odvija brojenje?

Broj različitih znamenaka i postupak brojenja ovise o izabranoj bazi. U sustavu s bazom b postoji točno b različitih znamenaka.

U ovom nizu postoje četiri različite znamenke, pa je riječ o sustavu s bazom četiri.

Primjer 3. U kojem brojevnom sustavu vrijedi račun:

$$24 \times 13 = 345?$$

Neka je x baza tog sustava. Tada ova jednakost glasi

$$(2x+4)(x+3) = 3x^2 + 4x + 5.$$

Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Njezina su rješenja $x = -1$ i $x = 7$. Račun je napisan u sustavu s bazom 7.

Zadatak 2. Prevedi brojeve $24_{(7)}$, $13_{(7)}$, $345_{(7)}$ u dekadski sustav i uvjeri se u ispravnost računa $24_{(7)} \times 13_{(7)} = 345_{(7)}$.

Zadatak 3. U kojem brojevnom sustavu vrijedi račun: $2381 - 1926 = 657$?

Primjer 4.

Koji se troznamenkasti broj u sustavu s bazom 7 piše na način xyz, a u sustavu s bazom 11 na način zyx?

Iz jednadžbe $xyz_{(7)} = zyx_{(11)}$ slijedi

$$49x + 7y + z = 121z + 11y + x,$$

odakle je

$$6(2x - 5z) = y.$$

Brojevi x, y, z nenegativni su cijeli brojevi manji od 7, jer su to znamenke u sustavu s bazom 7. Budući da je lijeva strana jednakosti djeljiva sa 6, mora biti $y = 0$ ili $y = 6$. Za $y = 0$ je $2x = 5z$, odakle je $x = 5$, $z = 2$. Time smo dobili rješenje $502_{(7)} = 205_{(11)}$.

Ako je $y = 6$, onda mora biti $2x - 5z = 1$, odakle je $z = 1$ i $x = 3$, te je još jedno rješenje $361_{(7)} = 163_{(11)}$.

Istaknuti brojevni sustavi

Iako svaki prirodni broj $b > 1$ može poslužiti kao baza brojevnog sustava, u praktičnoj uporabi su četiri brojevna sustava:

- **Dekadski** sustav (s bazom deset). Tu koristimo standardna imena i zapis znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- **Binarni** sustav (s bazom dva). Tu postoje samo dvije različite znamenke: 0 i 1. Ovdje je, zbog malog broja različitih znamenaka, prikladnije brojeve čitati znamenku po znamenku. Tako, primjerice, broj $13 = 1101_{(2)}$ čitamo jedan-jedan-nula-jedan a ne tisuću sto i jedan.

- **Oktalni** sustav (s bazom osam) ima osam različitih znamenaka. Za njihov zapis koristimo prvih osam znamenaka dekadskog sustava: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Brojeve čitamo na isti način kao u dekadskom sustavu.

- **Heksadekadski** sustav (s bazom šesnaest) ima šesnaest različitih znamenaka. U njihovom zapisu koristimo svih deset znamenaka dekadskog sustava i prvih šest slova latinične abecede: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Dekadske vrijednosti nekih heksadekadskih brojeva su:

$$A_{(16)} = 10, \quad B_{(16)} = 11, \quad C_{(16)} = 12,$$
$$D_{(16)} = 13, \quad E_{(16)} = 14, \quad F_{(16)} = 15,$$
$$2C_{(16)} = 2 \cdot 16 + 12 = 44,$$
$$E38_{(16)} = 14 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 8 = 3640.$$

  Brojeve zapisane u heksadekadskom sustavu čitamo znamenku po znamenku.

Veza binarne, oktalne i heksadekadske baze

Razvojem računalstva naročito su značajne postale binarna i heksadekadska baza. Razlog tome je što računalo čitav svoj rad zasniva na činjenici da se svaki njegov elementarni sklop (*bit*) može nalaziti u jednom od dvaju stanja: 0 — neaktivnom i 1 — aktivnom. Kombiniranjem bitova možemo zapisati sve prirodne brojeve *u binarnom sustavu*. Svaki je broj u računalu pohranjen u binarnom sustavu. Svako slovo ima svoj brojčani ekvivalent i ponovno je prikazano brojem u binarnom sustavu. Svaka poruka napisana na tipkovnici pretvara se u niz nula i jedinica i pamti u binarnom sustavu.

```
53 76 61 6B 6F 20 73 6C 6F 76 6F 20 69 6D 61 20    Svako slovo ima
73 76 6F 6A 20 62 72 6F 6A 63 63 61 6E 69 20 65    svoj brojčani e
6B 76 69 76 61 6C 65 6E 74 20 69 20 70 6F 6E 6F    kvivalent i pono
76 6E 6F 20 6A 65 0D 0A 70 72 69 6B 61 7A 61 6E    vno je  prikazan
6F 20 62 72 6F 6A 65 6D 20 75 20 62 69 6E 61 72    o brojem u binar
6E 6F 6D 20 73 75 73 74 61 76 75 2E 20 53 76 61    nom sustavu.  Sva
6B 61 20 70 6F 72 75 6B 61 0D 0A 6E 61 70 69 73    ka poruka  napis
61 6E 61 20 6E 61 20 74 69 70 6B 6F 76 6E 69 63    ana na tipkovnic
69 20 70 72 65 74 76 61 72 61 20 73 65 20 75 20    i pretvara se u
6E 69 7A 20 6E 75 6C 61 20 69 20 6A 65 64 69 6E    niz nula i jedin
69 63 61 0D 0A 69 20 70 61 6D 74 69 20 75 20 62    ica  i pamti u b
69 6E 61 72 6E 6F 6D 20 73 75 73 74 61 76 75 2E    inarnom sustavu.
```

Lijevo se nalazi djelić teksta ovog poglavlja u obliku kakvom ga pamti računalo. Svaki znak na tipkovnici ima svoj brojčani ekvivalent. Koje područje pokrivaju mala i velika slova abecede? Potraži na internetu informacije o pojmovima ASCII *i* Unicode*.*

Zapis je u binarnom sustavu jednostavan, no zahtijeva velik broj znamenaka. Stoga se binarni brojevi uglavnom prevode u heksadekadski sustav. Taj je prijelaz vrlo jednostavan. Naime, jedna znamenka heksadekadskog sustava odgovara točno četirima znamenkama binarnog sustava. To se događa zbog toga što je broj 16 potencija broja 2, $16 = 2^4$. Prikažimo odnos brojeva u ovim dvama sustavima. Brojevi s lijeve strane jednakosti zapisani su u heksadekadskom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$0 = 0$	$4 = 100$	$8 = 1000$	$\mathrm{C} = 1100$
$1 = 1$	$5 = 101$	$9 = 1001$	$\mathrm{D} = 1101$
$2 = 10$	$6 = 110$	$\mathrm{A} = 1010$	$\mathrm{E} = 1110$
$3 = 11$	$7 = 111$	$\mathrm{B} = 1011$	$\mathrm{F} = 1111$

Sada se koristeći ovu tablicu višeznamenkasti broj napisan u heksadekadskom sustavu lako može prevesti u binarni broj i obratno.

Primjer 5.

Napišimo u binarnom sustavu sljedeće brojeve: $34_{(16)}$, $2\mathrm{A}_{(16)}$, $6\mathrm{C}9_{(16)}$, $2\mathrm{EB}3_{(16)}$.

Svakoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava (nule na početku broja ispuštamo).

$$\begin{aligned} 34_{(16)} &= 11\,0100_{(2)}, \\ 2\mathrm{A}_{(16)} &= 10\,1010_{(2)}, \\ 6\mathrm{C}9_{(16)} &= 110\,1100\,1001_{(2)}, \\ 2\mathrm{EB}3_{(16)} &= 10\,1110\,1011\,0011_{(2)}. \end{aligned}$$

Primjer 6. Napišimo u heksadekadskom sustavu sljedeće brojeve: $1011101_{(2)}$, $110001011101011_{(2)}$, $11111111111111_{(2)}$.

▶ Znamenke grupiramo u skupine po četiri (počevši od krajnjih desnih). Skupini od četiriju znamenaka binarnog sustava odgovara jedna znamenka heksadekadskog sustava:

$$101\,1101_{(2)} = 0101\,1101_{(2)} = 5D_{(16)},$$
$$110\,0010\,1110\,1011_{(2)} = 62EB_{(16)},$$
$$11\,1111\,1111\,1111_{(2)} = 3FFF_{(16)}.$$

Zapise oblika 2AA132FF vidjet ćemo pretražujući programe napisane internim jezikom računala. Time je predstavljen osmeroznamenkasti broj u heksadekadskom sustavu koji odgovara tridesetdvoznamenkastom binarnom broju, što je standardni zapis podatka u memoriji 32-bitnog osobnog računala.

Slična veza postoji i između binarnog i oktalnog sustava. Jedna znamenka oktalnog sustava odgovara točno trima znamenkama binarnog sustava, jer je $2^3 = 8$. Prikažimo odnos brojeva u ovim dvama sustavima. S lijeve strane su brojevi zapisani u oktalnom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$0 = 0$	$4 = 100$
$1 = 1$	$5 = 101$
$2 = 10$	$6 = 110$
$3 = 11$	$7 = 111$

Tako vrijedi:

$$16_{(8)} = 1\,110_{(2)},$$
$$5407_{(8)} = 101\,100\,000\,111_{(2)},$$
$$10\,010\,111\,001_{(2)} = 2271_{(8)},$$
$$11\,111\,111\,111_{(2)} = 3777_{(8)}.$$

Primjer 7. Broj 2CA2 zapisan u heksadekadskom sustavu prebacimo u oktalni sustav.

▶ Pretvorbu ćemo načiniti s pomoću binarnog sustava: broj ćemo najprije prebaciti u binarni sustav, a zatim iz njega u oktalni. Jednoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava, a zatim trima znamenkama binarnog odgovara jedna znamenka oktalnog sustava:

$$2CA2_{(16)} = 10\,1100\,1010\,0010_{(2)} = 10\,110\,010\,100\,010_{(2)}$$
$$= 26242_{(8)}.$$

Primjer 8. Broj $51\,707_{(8)}$ prevedimo u sustav s bazom 16.

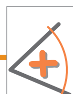
Koristeći se tablicom s prethodne strane zapišimo najprije dani broj u binarnom sustavu:

$$51\,707_{(8)} = 101\,001\,111\,000\,111_{(2)} = 101\,0011\,1100\,0111_{(2)}.$$

Sad ovaj broj prevedimo iz binarnog u heksadekadski sustav:

$$101\,0011\,1100\,0111_{(2)} = 53C7_{(16)}.$$

Zadatak 4. **1)** Broj $BA3_{(16)}$ prevedi u oktalni sustav.
2) Broj $557_{(8)}$ zapiši u heksadekadskom brojevnom sustavu.



Kutak plus

JERRY i MICKEY MOUSE



U Disneylandu brojevi imaju neko drugo značenje.

Početak *mišje ere* zbio se u osvit velike ekonomske krize, kad je 15. svibnja rođen Mickey Mouse pod ravnateljstvom Walta Disneyja i crtača Uba Iwerksa.

18. studenog 1978., povodom jubilarnog rođendana, Mickey Mouse je dobio svoju zvjezdicu na *Hollywood Walk of Fame*, kao prvi animirani junak kojemu je to uspjelo. Tad je brojao 62 mišje godine.

Najpopularniji miš, Jerry, mlađi je od Mickeyja Mousa. Evo što je zapisao u svoj dnevnik: “Rođen sam u radionici Williama Hanne i Josepha Barbere godine 14. *mišje ere*. Will i Joe su opisali 162 moje dogodovštine, od kojih je 15 bilo nominirano za Oscara u kategoriji kratkog animiranog filma. Osvojili smo tu nagradu u više od pola nominacija, točno 7 puta.”



U periodu od 1960. do 1962. Gene Deitch stvorio je 13 epizoda, a preostale od 1963. do 1967. animirao je Chuck Jones.

Načinjeno je ukupno 162 filma.

Tom i Jerry nastavili su živjeti i dalje, ali nove epizode nastale devedesetih godina po mnogo čemu se ne mogu mjeriti s onima iz klasičnog doba.

1. Koliko prstiju na obje ruke ima Mickey Mouse?
2. Koje je godine (po ljudskom kalendaru) on rođen?
3. Jerry je rođen 10. veljače, koje godine?
4. Koliko je epizoda Toma i Jerryja nacrtao Chuck Jones?

Prijelaz iz dekadskog sustava

Prijelaz iz dekadskog sustava u sustav s bazom b nije tako jednostavan. Uzrok tome je što broj 10 nije potencija nijednog prirodnog broja b.

Primjer 9. Prikažimo broj 238 u sustavu s bazom 8.

Potencije broja 8 su: $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$. Kako je time premašen zadani broj, najveća potencija koja ulazi u prikaz broja bit će $8^2 = 64$. Sad se pitamo: koliko puta možemo 'otkinuti' broj 64 od broja 238? Vrijedi:

$$238 = 3 \cdot 64 + 46.$$

Postupak nastavljamo s brojem 46:

$$238 = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 6 = 356_{(8)}.$$

Zadatak 5. Prikaži broj 238 u sustavima s bazama 6, 5 i 4.



Ovakav je način računanja općenito nepraktičan i dug. Zapišimo rezultat dobiven u prethodnom primjeru kao

$$238 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6 = (3 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 6.$$

U ovom se rastavu prepoznaju znamenke 3, 5 i 6 u zapisu broja u oktalnom sustavu. Posljednja znamenka 6 je ostatak pri dijeljenju broja 238 s 8:

$$238 = 29 \cdot 8 + 6.$$

Druga znamenka zdesna dobiva se kao ostatak pri dijeljenju broja 29 s 8:

$$29 = 3 \cdot 8 + 5.$$

Kvocijent daje vodeću znamenku broja.

Primjer 10. Prevedimo broj 94 u sustav s bazom 4.

Vrijedi:

$$\begin{array}{rl} 94 = 23 \cdot 4 + 2 & \quad 2 \\ 23 = 5 \cdot 4 + 3 & \quad 3 \\ 5 = 1 \cdot 4 + 1 & \quad 1 \\ 1 = 0 \cdot 4 + 1 & \quad 1 \end{array}$$

Zato je $73 = 1132_{(4)}$.

Zadatak 6. Računajući na ovaj način, prevedi broj 238 u sustav s bazom 4.

Primjer 11. Prevedimo u oktalni i heksadekadski sustav broj 243681.

Zadani broj dijelimo s brojem 8. Da bismo dobili količnik, možemo rabiti džepno računalo. Nakon toga je lako odrediti ostatak.

$$\begin{aligned}
243681 &= 30460.125 \cdot 8 = 30460 \cdot 8 + 1, && 1\\
30460 &= 3807.5 \cdot 8 = 3807 \cdot 8 + 4, && 4\\
3807 &= 475.875 \cdot 8 = 475 \cdot 8 + 7, && 7\\
475 &= 59.375 \cdot 8 = 59 \cdot 8 + 3, && 3\\
59 &= 7 \cdot 8 + 3, && 3\\
7 &= 0 \cdot 8 + 7, && 7
\end{aligned}$$

Dakle, $243681 = 733741_{(8)}$.

Za prijelaz u heksadekadsku bazu dijelimo s brojem 16. Ostatke, ako su veći od 9, pišemo onako kako se zapisuju heksadekadske znamenke:

$$\begin{aligned}
243681 &= 15230.0625 \cdot 16 = 15230 \cdot 16 + 1, && 1\\
15230 &= 951.875 = 951 \cdot 16 + 14, && \mathrm{E}\\
951 &= 59.4375 \cdot 16 = 59 \cdot 16 + 7, && 7\\
59 &= 3 \cdot 16 + 11, && \mathrm{B}\\
3 &= 0 \cdot 16 + 3, && 3
\end{aligned}$$

Dakle, $243681 = 3B7E1_{(16)}$.

Zadatak 7. Prevedi u oktalni i heksadekadski sustav ove dekadske brojeve:
123 ; 9876 ; 55 555 .

Primjer 12. Odredimo binarni prikaz broja 75 .

Dijeljenje s 2 je jednostavno pa koristimo jednostavniji zapis. U prvom retku pišemo količnike, a u drugom ostatke.

75	37	18	9	4	2	1
1	1	0	1	0	0	1

Dobivene znamenke pišu se zdesna nalijevo.

Dobili smo $75 = 1001011_{(2)}$.

Zadatak 8. Prevedi u binarni brojevni sustav brojeve:
11 ; 22 ; 333 ; 4444 .

Prijelaz u dekadski sustav

Prijelaz iz sustava s bazom b u dekadski sustav je jednostavniji. Ako je $N = a_n a_{n-1} \ldots a_{0(b)}$, onda moramo izračunati broj

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0.$$

Ovaj se broj može računati na uobičajeni način, potenciranjem i zbrajanjem. Ipak, objasnit ćemo algoritam za njegovo računanje u kojem ćemo koristiti samo množenje i zbrajanje, a ne i operaciju potenciranja.

Primjer 13. Prikažimo u dekadskoj bazi broj $3156_{(8)}$.

Računajmo ovako:

$$N = 3156_{(8)} = 3 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 6 = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (1 + 3 \cdot 8)).$$

Računajmo od nutarnjih zagrada prema van:

$$N = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (25)) = 6 + 8 \cdot (205) = 1646.$$

Cijeli postupak ispišimo u obliku tablice

	3	1	5	6
8	3	25	205	1646

Svaki se broj u drugom retku dobije tako da se prethodni pomnoži s $b = 8$ i doda mu se broj iz prvog retka iznad njega. Ispišimo cijeli postupak, korak po korak.

	3	1	5	6
8				

[U prvom retku napisane su znamenke broja, a u drugom vrijednost baze b.]

	3	1	5	6
8	3			

[Prepišimo vrijednost prve znamenke.]

	3	1	5	6
8	3	25		

[Vrijednost baze $b = 8$ pomnožimo s elementom drugog retka i dodajmo sljedeći broj iz prvog retka: $8 \cdot 3 + 1 = 25$.]

	3	1	5	6
8	3	25	205	

[Nastavimo na isti način: $8 \cdot 25 + 5 = 205$.]

	3	1	5	6
8	3	25	205	1646

[$8 \cdot 205 + 6 = 1646$. Dobili smo konačnu tablicu, $N = 1646$.]

Ovaj se način računanja naziva **Hornerov algoritam**[1].

Zadatak 9. Prikaži u dekadskom sustavu broj $41\,227_{(8)}$.

[1] William George Horner (1786. – 1837.), engleski matematičar

Općenito, algoritam možemo napisati ovako:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
b	$c_n = a_n$	$c_{n-1} = c_n b + a_{n-1}$	$\dots$	$c_1 = c_2 b + a_1$	$c_0 = c_1 b + a_0$

Broj c_0 predstavlja traženi rezultat. U to se lako možemo uvjeriti ispisujući taj broj:

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1 b + a_0 \\ &= (bc_2 + a_1)b + a_0 = c_2 b^2 + a_1 b + a_0 \\ &\vdots \\ &= c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \\ &= (c_n b + a_{n-1})b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = a_n b^n + \ldots + a_1 b + a_0 = N. \end{aligned}$$

Primjer 14. Pretvorimo u dekadski sustav broj $\mathrm{A10E9}_{(16)}$.

Račun je napisan u tablici. Prisjetimo se da je $\mathrm{A}_{(16)} = 10$, $\mathrm{E}_{(16)} = 14$.

	A	1	0	E	9
16	10	161	2576	41230	659689

Dakle, $\mathrm{A10E9}_{(16)} = 659689$.

Zadatak 10. Prikaži u dekadskom sustavu brojeve $\mathrm{FFFF}_{(16)}$, $\mathrm{ABAB}_{(12)}$.

Zbrajanje i množenje u binarnom sustavu

Operacije zbrajanja i množenja možemo izvoditi i u sustavima s drugim bazama. Pravila su identična onima u dekadskom sustavu, jer su i drugi sustavi pozicijski brojevni sustavi. Pritom se mora savladati nova **tablica množenja i zbrajanja**, koja može biti čak i jednostavnija od naše standardne 10×10 tablice.

Da bismo napisali tablicu množenja i zbrajanja u nekom drugom sustavu, moramo odrediti zbroj i umnožak svih jednoznamenkastih brojeva, 0, 1, 2,..., $b-1$ u tom sustavu. Primjerice, za sustav s bazom 4 tablice glase:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

S pomoću ovakve tablice možemo direktno zbrajati i množiti brojeve u sustavu s bazom 4. Tablice zbrajanja i množenja jednostavnije su od dekadskih, ali račun

nije, jer na njega nismo navikli. Trebamo obratiti posebnu pozornost na prijenose znamenaka koje u ovom računu zapisujemo umanjenim znamenkama.

$$\begin{array}{rcccc} & & ^{1} & & \\ & 2 & 0 & 3 & 1 \\ + & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} ^{1\ \ 2} \\ \ \ 2\,0\,3\,1 \cdot 3 \\ \hline 1\,2\,2\,1\,1 \end{array}$$

Ovakav račun pokazuje da je naš način razmišljanja vezan za dekadsku bazu i da je bez ponovna učenja novih tablica praktički nemoguće računati u drugim sustavima. To, dakako, nećemo raditi. Umjesto toga, jednostavnije je brojeve prevesti u dekadski sustav, načiniti operacije u toj bazi i vratiti rezultat u početnu bazu.

— ◆ —

U binarnom sustavu tablice zbrajanja i množenja iznimno su jednostavne:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

i možemo ih brzo usvojiti. Pri zbrajanju brojeva u binarnom sustavu treba samo obratiti pozornost na prijenos znamenaka.

Primjer 15. Izračunajmo zbroj sljedećih brojeva napisanih u binarnom sustavu. Prijenosi znamenaka napisani su u prvom retku, sitnijim znakovima.

$$\begin{array}{rcccccc} & & ^{1} & ^{1} & ^{1} & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} & ^{1} & & & ^{1} & ^{1} & \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccccc} & & ^{1} & ^{1} & ^{1} & ^{1} & ^{1} & ^{1} & & ^{1} & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} & & ^{1} & & ^{1} & ^{1} & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Zadatak 11. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

$$1011_{(2)} + 101_{(2)}, \qquad 100111001_{(2)} + 1011011_{(2)}.$$

Pretvori brojeve i rezultat u dekadski sustav i tako provjeri točnost računa.

Zadatak 12. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

$$100_{(2)} - 10_{(2)},$$
$$1000_{(2)} - 101_{(2)},$$
$$10010001_{(2)} - 110011_{(2)}.$$

Pretvori brojeve i rezultat u dekadski sustav i tako provjeri točnost računa.

Primjer 16. Izračunajmo umnožak sljedećih brojeva u binarnom sustavu:

$$\begin{array}{r} 10101 \cdot 101 \\ \hline 10101 \\ 10101 \\ \hline 1101001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 \cdot 1101 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ 1011 \\ \hline 10001111 \end{array}$$

Zadatak 13. Izračunaj umnožak sljedećih brojeva računajući u binarnom sustavu:

$$11_{(2)} \cdot 11_{(2)},$$
$$10101_{(2)} \cdot 11_{(2)},$$
$$10101_{(2)} \cdot 1011_{(2)}.$$



Točno-netočno pitalice

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Različitih znamenaka u zapisu broja može biti najviše deset. T N
2. Broj $5_{(b)}$ uvijek ima istu vrijednost, bez obzira u kojoj je bazi b zapisan. T N
3. Broj $99_{(b)}$ ima najveću vrijednost ako je baza b dekadska. T N
4. Broj 10101_4 veći je od broja 111_{16}. T N
5. Broj 121 je složen broj i to u svim sustavima s bazom većom od 2. T N
6. U sustavu s bazom 20 svaki se broj može zapisati s pomoću znamenaka 0, 1, 2,. . . , 9. T N
7. Najveći dvoznamenkasti broj u heksadekadskom sustavu je $9E_{16}$. T N
8. U heksadekadskom sustavu je broj djeljiv s 8 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 8. T N
9. Račun $2 \times 2 = 4$ istinit je u svakom brojevnom sustavu. T N

Zadatci 1.1.

1. Prevedi u dekadski sustav sljedeće brojeve:

1) $221_{(5)}$; **2)** $110\,011_{(2)}$;
3) $567_{(8)}$; **4)** $21\,000_{(3)}$;
5) $5\,550_{(6)}$; **6)** $2\,134_{(12)}$.

2. Zapiši u dekadskom sustavu brojeve:

1) $1011_{(2)}$, **2)** $100101_{(2)}$,
3) $1100101_{(2)}$, **4)** $110001011_{(2)}$,
5) $11_{(8)}$, **6)** $24_{(8)}$,
7) $126_{(8)}$, **8)** $3201_{(8)}$,
9) $8_{(16)}$, **10)** $20_{(16)}$,
11) $3\text{A}_{(16)}$, **12)** $2\text{EB}1_{(16)}$.

3. Zapiši dekadske brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 2, 8 i 16.

4. Zapiši dekadske brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 5, 9 i 12.

5. Zapiši dane dekadske brojeve u sustavima s bazama 2, 5 i 12:
11, 33, 100, 222, 1001.

6. Brojeve 1101, 11000110, 11001100101110011 zadane u binarnoj bazi prebaci u oktalni i heksadekadski sustav.

7. Brojeve 58, 1A2, FFFF zadane u heksadekadskom sustavu prebaci u oktalni sustav.

8. Brojeve 223, 517, 12 053 zadane u oktalnom sustavu prebaci u heksadekadski sustav.

9. Zapiši brojeve $212_{(3)}$, $30_{(4)}$, $245_{(6)}$, $177_{(8)}$, $28_{(12)}$ u sustavu s bazom 2.

10. Zapiši brojeve $101\,110_{(2)}$, $2102_{(3)}$, $3220_{(4)}$, $11\,011_{(5)}$ u sustavu s bazom 8.

11. **1)** Broj $7\text{AB}7_{(16)}$ prevedi u oktalni brojevni sustav.
2) Broj $34\,567_{(8)}$ prevedi u heksadekadski brojevni sustav.

12. **1)** Broj $8EF8_{(16)}$ prevedi u oktalni brojevni sustav.
2) Broj $76\,543_{(8)}$ prevedi u heksadekadski brojevni sustav.

13. Nastavi svaki od sljedećih nizova uzastopnih prirodnih brojeva:

1) 10, 11, 12, 20, 21...
2) 101, 110, 111, 1000, 1001...
3) 1, 2, 3, 10, 11, 12...
4) 23, 24, 25, 30, 31, 32...

14. Nastavi svaki od sljedećih nizova prirodnih brojeva:

1) 10011, 10010, 10001, 10000...
2) 10, 100, 110, 1000, 1010...
3) 10, 20, 100, 110, 120...
4) 11, 13, 20, 22, 24...

15. Izračunaj zbroj uzastopnih prirodnih brojeva:

$$1+2+3+4+10+11+12+13+14+20+\ldots+44+100.$$

16. Odredi, ako postoji, bazu brojevnog sustava u kojem vrijede jednakosti

1) $23\cdot 15 = 411$;
2) $32\cdot 22 = 541$;
3) $31\cdot 412 = 23\,322$.

17. U kojem sustavu vrijede jednakosti

1) $101_{(x)} + 1001_{(x)} = 1110_{(x)}$;
2) $1211_{(x)} - 1120_{(x)} = 21_{(x)}$?

18. Vrijede li u bilo kojem brojevnom sustavu jednakosti

1) $10101 + 1101 = 11202$;
2) $1211 - 1011 = 200$?

19. Zbroj triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 121. Koji su to brojevi?

20. Zbroj triju uzastopnih parnih brojeva u binarnom sustavu iznosi 11 110. Koji su to brojevi?

21. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 440. Koji su to brojevi?

22. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 9 iznosi 1320. Koji su to brojevi?

23. Umnožak dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva u binarnom sustavu iznosi 100 011. Koji su to brojevi?

24. Odredi prirodne brojeve x i y iz jednakosti **1)** $23_{(x)} = 41_{(y)}$; **2)** $144_{(x)} = 100_{(y)}$.

25. Odredi brojeve a, b i c iz jednakosti

1) $ab_{(5)} = ba_{(7)}$; **2)** $abc_{(5)} = cba_{(8)}$;

3) $aba_{(4)} = bab_{(6)}$.

26. **1)** U kojem je sustavu brojeva $101 \cdot 11 = 1111$?

2) U kojem je sustavu brojeva $1001 \cdot 111 = 111\,111$? Poopći zaključak!

27. Umnožak $11 \cdot 12 \cdot 13$ jednak je 3102. U kojem je brojevnom sustavu provedeno ovo množenje?

28. U kojem je brojevnom sustavu broj 144 potpuni kvadrat nekog prirodnog broja?

29. U kojem je brojevnom sustavu $125^2 = 16\,324$?

30. Broj 620 kvadrat je broja 24. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?

31. Broj 20 311 kub je broja 21. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?

32. U kojem je brojevnom sustavu broj 1331 potpuni kub nekog prirodnog broja?

33. U kojem je brojevnom sustavu $\sqrt{1331} = 33$? Koliko je u tom sustavu $\sqrt{2420}$?

34. U kojem je brojevnom sustavu $33 \cdot 22 = 1331$? Koliko je u istom sustavu $23 \cdot 32$?

35. U kojem je brojevnom sustavu $\sqrt{1210} = 22$? Koliko je u tom sustavu $\sqrt{3201}$?

36. U kojem je brojevnom sustavu $21 \cdot 22 = 1\,122$? Koliko je u istom sustavu $22 \cdot 12$?



37. Izračunaj računajući u binarnoj bazi:

1) $1101_{(2)} + 10101_{(2)}$;

2) $10101_{(2)} + 10111_{(2)}$;

3) $110111_{(2)} + 10101101_{(2)}$;

4) $1100101_{(2)} + 11001011_{(2)}$.

Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

38. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

1) $1111_{(2)} - 1001_{(2)}$;

2) $11001_{(2)} - 1101_{(2)}$;

3) $110011_{(2)} - 10110_{(2)}$;

4) $110010111_{(2)} - 1101011_{(2)}$.

Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

39. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

1) $110_{(2)} \cdot 11_{(2)}$; **2)** $1101_{(2)} \cdot 101_{(2)}$;

3) $11011_{(2)} \cdot 1001_{(2)}$; **4)** $110111_{(2)} \cdot 101101_{(2)}$.

Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

40. Napiši tablicu zbrajanja i množenja u sustavu s bazom 3. Uporabom tih tablica izračunaj $1201_{(3)} + 2012_{(3)}$; $1120221_{(3)} \cdot 2_{(3)}$; $20012_{(3)} \cdot 12_{(3)}$.

41. Sastavi tablice zbrajanja i množenja za sustave s bazama 4, 5 i 6.

42. Prevedi sljedeće brojeve zapisane u binarnom sustavu u dekadski sustav:

1) $11.1_{(2)}$; **2)** $101.101_{(2)}$;

3) $111.111_{(2)}$; **4)** $1000.0001_{(2)}$.

43. Napiši u binarnom sustavu sljedeće racionalne brojeve:

1) $\frac{1}{2}$; **2)** $\frac{1}{8}$; **3)** $\frac{3}{2}$;

4) $\frac{1}{2^n}$; **5)** 0.25 ; **6)** 2.5 ;

7) 12.125 ; **8)** 2.0625 .

44. Odredi pravila dijeljivosti brojevima 2, 3, 4, 6, 8, 9 i $B = 11$ u sustavu s bazom 12.

1.2. Matematička indukcija

Dva su osnovna načina logičkog zaključivanja: deduktivni i induktivni.

U deduktivnom pristupu se krenuvši od općih spoznaja izvode istinite činjenice u nekom konkretnom slučaju. Primjerice, zaključivanje tipa — svi su ljudi smrtni; Petar je čovjek, dakle, Petar je smrtan — primjer je deduktivnog zaključivanja.

Ovakav je način zaključivanja korektan: krenuvši od istinitih pretpostavki (premisa), uvijek dolazimo do istinitog zaključka (konkluzije). Njegov je nedostatak što zaključujući ovako ne možemo doći do novih, dotad nepoznatih općenitih spoznaja.

U induktivnom pristupu polazimo od činjenica koje vrijede u nekom konkretnom primjeru i na temelju toga želimo zaključiti o istinama koje vrijede u općenitijoj situaciji. Primjerice: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 2 metra. Dakle, svi muškarci niži su od 2 metra.

Ovaj je zaključak očito neistinit. Pritom nije važno što je dobivena konkluzija neistinita, nepravilan je *način razmišljanja*. Sljedeće je razmišljanje jednako tako logički nepravilno, bez obzira na to što upućuje na istinitu konkluziju: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 20 metara. Znači, svi muškarci niži su od 20 metara.

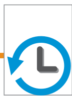
Iako može dovesti do pogrešnih rezultata, metoda induktivnog zaključivanja moćno je i ponekad jedino sredstvo u otkrivanju istinitih činjenica.

Primjer 1. Ovaj primjer neispravnog induktivnog zaključivanja dao je Euler. Promotrimo vrijednost izraza $P(n) = n^2 + n + 41$ za nekoliko prvih vrijednosti prirodnog broja n. Dobivamo brojeve 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97... — svi su oni prosti brojevi. Može li se zaključiti da će $P(n)$ biti prost za svaki prirodni broj n?

Odgovor je: ne! Za $n = 41$ broj očito nije prost, jer je svaki pribrojnik djeljiv s 41. Nije niti za $n = 40$, jer je $P(40) = 41^2$. Ali jest za sve prirodne brojeve manje od 40.

Princip matematičke indukcije

Da bi princip induktivnog zaključivanja uvijek dao ispravne rezultate, moramo osigurati neke dodatne uvjete. Na taj ćemo način dobiti način zaključivanja poznat pod imenom **matematička indukcija**.



Povijesni kutak

LEONHARD EULER



Leonhard Euler (Basel, 15. travnja 1707. – Sankt Peterburg, 18. rujna 1783.), veliki je švicarski matematičar, fizičar i astronom. Utjecao je na razvoj cjelokupne matematike. Matematiku je učio od Johanna Bernoullija. 1726. g., po osnutku Peterburške akademije znanosti, odlazi živjeti u Rusiju gdje ostaje do kraja života. Uz Cauchyja je matematičar s najviše objavljenih znanstvenih radova. Znameniti su i njegovi udžbenici *Introductio in analysin infinitorum*, *Institutiones calculi differentialis*, *Institutiones calculi integralis* i *Arithmetica universalis*.

Usprkos poodmakloj sljepoći, Euler je većinu radova napisao pri kraju života. Prvi je promatrao funkcije kompleksne varijable i povezao trigonometrijske s eksponencijalnim funkcijama. Uveo je analitičke metode u teoriju brojeva o kojoj je objavio 140 radova. Jedan je od tvoraca suvremene diferencijalne geometrije. Poznata je njegova formula $V - B + S = 2$, o odnosu broja vrhova, bridova i strana u poliedru. Drži se začetnikom i teorije grafova.

Princip matematičke indukcije

Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj $n+1$, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Primjer 2.

Odredimo formulu za zbroj prvih n neparnih brojeva.

Za početne zbrojeve vrijedi:

$$1 = 1,$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

Navedeni primjeri navode nas na pomisao da vrijedi

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \tag{1}$$

Time smo uporabili *induktivni* način mišljenja. Formula (1) istinita je za prve četiri vrijednosti broja n. Da bismo se uvjerili u njezinu istinitost *za svaki* prirodni broj n, primijenit ćemo princip matematičke indukcije.

Tvrdnja vrijedi za broj $n = 1$. Pretpostavimo da je formula (1) istinita za prirodni broj n i dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član. Iskoristimo pritom pretpostavku indukcije:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}_{=n^2} + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$. Zato ona vrijedi za svaki prirodni broj.



Dobro posložene domine prva su asocijacija za princip matematičke indukcije.

Radi jednostavnijeg dokazivanja pojedine korake u zaključivanju matematičkom indukcijom nazivamo posebnim imenima. Tvrdnju o kojoj je riječ označujemo s $T(n)$. Dakle, neka je $T(n)$ tvrdnja koja ovisi samo o prirodnom broju n.

Dokaz matematičkom indukcijom

Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka.

i) **Baza indukcije.** Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je $T(1)$ istinita tvrdnja.

ii) **Pretpostavka indukcije.** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je $T(n)$ istinita tvrdnja.

iii) **Korak indukcije.** Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$, tj. iz $T(n)$ slijedi tvrdnja $T(n+1)$.

Tad je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj n.

Primjer 3. Koristeći matematičku indukciju pokažimo istinitost formule

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{2}$$

Tvrdnja $T(n)$ koju želimo dokazati glasi: formula (2) vrijedi za svaki prirodni broj n.

Baza indukcije. $T(1)$ vrijedi, jer u zbroju s lijeve strane imamo samo jedan član, a desna strana iznosi 1:

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}.$$

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n: formula (2) je istinita.

Korak indukcije. Dodajmo lijevoj strani jednakosti sljedeći pribrojnik i iskoristimo pretpostavku indukcije:

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}_{\text{iskoristimo } T(n)}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}.$$

Dobili smo formulu istovjetnu formuli (2), s $n+1$ umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj $n+1$, dakle, $T(n+1)$ je istinita tvrdnja. Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Zadatak 1. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Primjer 4. Dokažimo da je broj $4^n + 15n - 1$ djeljiv s 9 za svaki prirodni broj n.

Baza indukcije. Za $n = 1$, broj 18 je djeljiv s 9.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Tada se može napisati

$$4^n + 15n - 1 = 9k$$

za neki prirodni broj k.

Korak indukcije. Provjerimo istinitost tvrdnje za broj $n + 1$.

$$4^{n+1}+15(n+1)-1 = 4[4^n+15n-1]-45n+18 = 9(4k-5n+2).$$

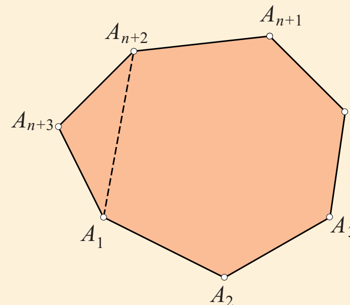
Ovaj je broj djeljiv s 9 i tvrdnja je dokazana.

Zadatak 2. Dokaži:

1) Broj $9^{n+1} + 8n - 9$ djeljiv je sa 16, za svaki prirodni broj n.
2) Broj $3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}$ djeljiv je s 13, za svaki prirodni broj n.

Primjer 5. Dokažimo da je zbroj kutova u svakom mnogokutu s $n+2$ stranice jednak $n \cdot 180°$.

Dokazujemo indukcijom.



Baza indukcije. Za $n = 1$ riječ je o trokutu čiji je zbroj kutova $180°$ — tvrdnja $T(1)$ vrijedi.

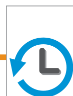
Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi za prirodni broj n: zbroj kutova u mnogokutu s $n + 2$ stranice iznosi $n \cdot 180°$.

Korak indukcije. Promotrimo mnogokut s jednom stranicom više, dakle, s $n + 3$ stranice. Odsijecanjem bilo kojeg trokuta (kao na slici) dobivamo jedan trokut (čiji je zbroj kutova $180°$) i jedan mnogokut s $n+2$ stranice, čiji je zbroj kutova po pretpostavci indukcije jednak $n \cdot 180°$. Zato je zbroj kutova u mnogokutu s $n + 3$ stranice jednak $(n + 1) \cdot 180°$, što je i trebalo dokazati.

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Zadatak 3. Dokaži da je broj dijagonala u mnogokutu s n stranica jednak $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Zadatak 4. U ravnini je povučeno n pravaca tako da među njima nema paralelnih. Dokaži da se ti pravci sijeku u $\dfrac{n(n-1)}{2}$ točaka.



Povijesni kutak

INDUKCIJA U STAROJ GRČKOJ

O indukciji su razmišljali još i stari Grci. Evo glasovitog *sofizma hrpe*, u slobodnoj interpretaciji. Ustanovi koji je dio principa matematičke indukcije narušen u ovome razmišljanju:

– Čini li jedno zrno hrpu?
– Ne, dakako da ne.
– A dva zrna?
– Isto tako ne.
– Ako nekoliko zrna ne čini hrpu, pa mu dodamo jedno jedino zrno, nije li prirodno da ni tad nećemo dobiti hrpu?
– Svakako da imaš pravo.
– Dakle, nijedan broj zrna ne čini hrpu!

Primjer 6. (**Bernoullijeva nejednakost**) Za svaki prirodni broj n i svaki realni broj $h > -1$ vrijedi

$$(1+h)^n \geqslant 1+nh. \tag{3}$$

Pritom jednakost vrijedi samo za $n=1$ ili za $h=0$.

Za $n=1$ lijeva i desna strana su jednake, pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da (3) vrijedi za prirodni broj n. Sad imamo:

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n(1+h) \geqslant (1+nh)(1+h)\\ &= 1+nh+h+nh^2 \geqslant 1+(n+1)h,\end{aligned}$$

i tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki n. (Na kojem je mjestu korištena pretpostavka $h > -1$?)

Primjer 7. Dokažimo matematičkom indukcijom

$$2^n > n^2, \qquad \text{za sve } n \geqslant 5.$$

Za $n=5$ imamo $32 > 25$ i tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $2^n > n^2$. Onda je

$$2^{n+1} > 2n^2 = n^2+n^2 > n^2+3n > n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

Ovdje smo koristili očitu nejednakost $n^2 > 3n$ koja vrijedi za $n > 3$.

Zadatak 5. Dokaži matematičkom indukcijom

$$2^n > n^2+4n, \qquad \text{za sve } n \geqslant 6.$$

Primjer 8. Dokažimo nejednakost

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Za $n=1$ nejednakost se svodi na $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$, što je istina.

Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za prirodan broj n. Tada je

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

Sada je dovoljno dokazati da vrijedi

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}<\frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Ova je nejednakost ekvivalentna s

$$\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n+3}<2n+2.$$

Nakon kvadriranja i sređivanja, dobiva se istinita nejednakost $0<1$. Time je korak indukcije dokazan.



Kutak plus

O INDUKTIVNOM ZAKLJUČIVANJU

Promotrimo sljedeću tvrdnju: broj $991n^2+1$ nije potpun kvadrat niti za jedan prirodni broj n. Uvrštavanjem broja n u ovaj izraz uvjerit ćemo se da je tvrdnja istinita za $n=1,2,3,4,5,\ldots,100,\ldots,1000\ldots$ Mogli bismo neoprezno zaključiti da je ona istinita za svaki n. Zapravo, ova će tvrdnja biti istinita za sve brojeve n manje od $12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$. Međutim, za taj n izraz $991n^2+1$ je potpuni kvadrat. Zanimljivo je da se može pokazati kako postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je $991n^2+1$ potpun kvadrat.

GOLDBACHOVA HIPOTEZA

Svaki je paran broj veći od 2 jednak zbroju dvaju prostih brojeva. Tako, primjerice, vrijedi: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7=5+5$; $12=5+7$, $16=3+13=5+11\ldots$, $94=5+89$, $96=7+89$, $98=19+79$ (prikaz nije uvijek jednoznačan). Tvrdnja se pokazuje točnom i pri provjeri za sljedeće parne brojeve.

Ova je tvrdnja poznata pod imenom **Goldbachova hipoteza**, po njemačkom matematičaru Christianu Goldbachu (1690. – 1764.) koji ju je prvi formulirao još 1742. g., u pismu L. Euleru. Do danas je provjerena za velik skup početnih prirodnih brojeva (npr. za sve brojeve manje od 10^{14}) i pokazala se istinitom. Međutim, sama tvrdnja još uvijek nije dokazana.

Potražite u vašoj knjižnici i pročitajte što o Goldbachovoj hipotezi u zabavnom tonu piše grčki matematičar i romanopisac Apostolos Doxiadis u romanu *Stric Petros i Goldbachova slutnja*, djelu prevedenom na više od deset jezika.

Zadatci 1.2.

1. Koristeći induktivni način razmišljanja, predvidi sljedeći član u svakom od nizova:

1) 1, 7, 13, 19, 25, ?;
2) 1, 3, 7, 13, 21, ?;
3) 1, 3, 7, 15, 31, ?;
4) 1, 4, 9, 16, 25, ?;
5) 1, 2, 5, 14, 41, ?;
6) 2, 3, 5, 7, 11, ?;
7) 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ?;
8) J, D, T, Č, P, ?.

2. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

1) $-3+3+9+\ldots+(6n-9)=3n^2-6n$;
2) $-1+3+7+\ldots+(4n-5)=n(2n-3)$;
3) $-3-7-11-\ldots-(4n-1)=-n(2n+1)$;
4) $5+8+11+\ldots+(3n+2)=\frac{1}{2}n(3n+7)$.

3. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

1) $2+7+15+\ldots+\frac{1}{2}n(3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)^2$;
2) $-1+3-5+\ldots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n\cdot n$;
3) $3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{n-1}=3(2^n-1)$;
4) $2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$.

4. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

1) $1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}+\ldots+n\cdot 2+(n+1)$
$=2^{n+2}-(n+3)$;
2) $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2$
$=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$;
3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\ldots+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

5. Uvrsti nekoliko početnih vrijednosti za broj n i pokušaj odrediti izraz za sljedeće zbrojeve. Dobivenu formulu provjeri matematičkom indukcijom.

1) $1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}=?$
2) $1+3+9+27+\ldots+3^{n-1}=?$
3) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}=?$

6. Dokaži da za $x \neq 1$ (i $x \neq -1$ u trećem primjeru) i za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

1) $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$;
2) $x+2x^2+\ldots+nx^n=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+n\cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}$,
za sve $n \in \mathbf{N}$;
3) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\ldots+\dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}$
$=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

7. Dokaži matematičkom indukcijom:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$;
2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$
$=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;
3) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$;
4) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2(n+1)}$;
5) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\dfrac{n}{2(n+2)}$;
6) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{16}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

8. Dokaži matematičkom indukcijom:

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}=2^n.$$

9. Matematičkom indukcijom provjeri sljedeće formule za zbrojeve potencija $S_k=1^k+2^k+\ldots+n^k$, $k \in \mathbf{N}$.

$S_1=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

$S_2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$S_3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

$S_4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

10. Koristeći se formulama iz prethodnog zadatka, izračunaj sljedeće sume:

1) $2\cdot 2+2\cdot 5+2\cdot 8+\ldots+2(3n-1)$;
2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)$;
3) $1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+\ldots+(2n-1)(2n+1)$;
4) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)$;
5) $1{\cdot}2{\cdot}3+2{\cdot}3{\cdot}4+3{\cdot}4{\cdot}5+\ldots+n(n+1)(n+2)$;
6) $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+(n+1)\cdot n^2$.



11. Matematičkom indukcijom dokaži sljedeću formulu za kvadriranje višečlanog izraza:
$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$
$+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)$.

12. Matematičkom indukcijom dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi:

1) $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$;
2) $|a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdot\ldots\cdot|a_n|$.

13. Matematičkom indukcijom dokaži:

1) 6^n+4 je djeljiv s 5;
2) 7^n-1 je djeljiv sa 6;
3) 5^n-2^3 je djeljiv s 3;
za sve prirodne brojeve n.

14. Matematičkom indukcijom dokaži:

1) $6\mid n^3+11n$;
2) $6\mid 2n^3+3n^2+7n$;
3) $24\mid n^4+6n^3+11n^2+6n$;
4) $7\mid n^7+6n$;
za sve prirodne brojeve n.

15. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n\in\mathbf{N}$ vrijedi:

1) $9\mid 7^n+3n-1$;
2) $11\mid 6^{2n}+3^{n+2}+3^n$;
3) $17\mid 6^{2n}+19^n-2^{n+1}$;
4) $17\mid 2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$;
5) $19\mid 7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$;
6) $37\mid 2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1}$;
7) $64\mid 3^{2n+1}+40n-67$;
8) $57\mid 7^{n+2}+8^{2n+1}$.

16. Dokaži da su za sve prirodne brojeve n ispunjene nejednakosti:
1) $4^n>n^2$; **2)** $2^n>n^2-2n+2$.

17. Matematičkom indukcijom dokaži:

1) $3^n>2^n+3n$, za sve $n\geqslant 3$;
2) $n^3>3n+3$, za sve $n\geqslant 3$;
3) $2^n>n^2$, za sve $n\geqslant 5$;
4) $2^n>n^3$, za sve $n\geqslant 10$.

18. Dokaži da je broj $7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^{4n}$ djeljiv sa 100 za svaki prirodni broj n.

19. Dokaži da za svaki prirodni broj n, $n>1$, broj $2^{2^n}+1$ završava znamenkom 7.



20. Dokaži matematičkom indukcijom:

1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$
$=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\dfrac{nx}{2}$;

2) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$
$=\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\dfrac{nx}{2}$;

3) $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x=\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$;

4) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

21. Matematičkom indukcijom dokaži:

1) $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^n x=\dfrac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}$;

2) $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$;

1) $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$;

2) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}$
$=\dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$.

1.3. Binomni poučak

Faktorijele

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo ovako[2]:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\,.$$

Broj $n!$ čitamo "en faktorijela". Tako, primjerice, vrijedi:

$$\begin{aligned}
1! &= 1,\\
2! &= 1 \cdot 2 = 2,\\
3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,\\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,\\
5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.
\end{aligned}$$

Korisno je definirati i vrijednost $0!$. Stavljamo: $0! := 1$.

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

uz početnu vrijednost $0! = 1$. Tako je, primjerice: $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$, $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$ itd.

Funkcija faktorijela raste izuzetno brzo. Njezine vrijednosti možemo očitavati na svakom boljem džepnom računalu, ali samo za umjerene vrijednosti broja n, obično za $n \leqslant 69$, $69! \approx 1.711 \cdot 10^{98}$ ili izuzetno za $n \leqslant 253$, $253! \approx 5.173 \cdot 10^{499}$.

Primjer 1.

Izračunajmo:

1) $\dfrac{11!}{9!}$; **2)** $\dfrac{6!-5!}{4!}$; **3)** $\dfrac{9!+10!}{11!}$.

1) $\dfrac{11!}{9!} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 11 \cdot 10 = 110.$

2) $\dfrac{6!-5!}{4!} = \dfrac{6 \cdot 5! - 5!}{4!} = \dfrac{5 \cdot 5!}{4!} = \dfrac{25 \cdot 4!}{4!} = 25.$

3) $\dfrac{9!+10!}{11!} = \dfrac{9! + 10 \cdot 9!}{9! \cdot 10 \cdot 11} = \dfrac{1+10}{10 \cdot 11} = \dfrac{1}{10}.$

Zadatak 1. Izračunaj: **1)** $7! + 8! + 9!$; **2)** $12! - 1$; **3)** $\dfrac{25!}{20!}$; **4)** $\dfrac{7!-6!}{120}$.

[2] Simbol := čitaj: *"po definiciji jednako"*. Time se naznačava da se izraz s lijeve strane *definira* da bude jednak onome s desne strane. Ta se oznaka naročito rabi u različitim programskim jezicima, gdje su moguće i konstrukcije oblika $n := n + 1$ i njima slične.

Binomni koeficijenti

Neka je n prirodan broj i k prirodan broj ili 0, $k \leqslant n$. **Binomni koeficijent** označavamo izrazom $\binom{n}{k}$ i definiramo ga ovako:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k},$$

za $k \geqslant 1$, dok za $k = 0$ po definiciji stavljamo:

$$\binom{n}{0} := 1.$$

Izraz $\binom{n}{k}$ čita se: "n povrh (ili iznad) k".

Primjer 2.

Za $k = 1, 2, 3$ vrijednosti binomnih koeficijenata su:

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Primjer 3.

Izračunajmo nekoliko binomnih koeficijenata:

$$\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15,$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56,$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 56,$$

$$\binom{9}{5} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 126,$$

$$\binom{12}{8} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 495.$$

Zadatak 2. Izračunaj: **1)** $\binom{5}{2}$, **2)** $\binom{7}{3}$, **3)** $\binom{9}{5}$, **4)** $\binom{11}{4}$, **5)** $\binom{15}{2}$.

Zadatak 3. Skrati razlomke: **1)** $\frac{n!}{(n-2)!}$; **2)** $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Računanje binomnih koeficijenata

Vrijednosti binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ za male brojeve n i k računamo tako da najprije u nazivniku ispišemo umnožak svih brojeva od 1 do k u rastućem poretku, a u brojniku umnožak brojeva u padajućem poretku počevši s n. Faktora u brojniku ima jednako kao u nazivniku. Prije računanja brojnik se skrati s nazivnikom.

Primjer 4.

Odredimo prirodni broj n tako da vrijedi jednakost:

$$5\binom{n}{3} = \binom{n+2}{4}.$$

Nakon raspisivanja i sređivanja, pratimo ekvivalentne jednakosti:

$$5 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24},$$

$$20(n-2) = (n+2)(n+1),$$

$$n^2 - 17n + 42 = 0.$$

Kvadratna jednadžba ima dva rješenja: $n = 3$ i $n = 14$.

Binomni je koeficijent uvijek prirodan broj. To nije očito iz definicijske formule, već ćemo to zaključiti iz sljedećih svojstava binomnih koeficijenata.

Svojstva binomnih koeficijenata

1. Prikaz s pomoću faktorijela

Brojnik i nazivnik u definiciji binomnog koeficijenta možemo pomnožiti s $(n-k)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)$. Dobit ćemo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \frac{(n-k)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ova 'jednostavnija' formula nije praktična u računanju koeficijenata, jer se pritom moraju dodatno skraćivati brojnik i nazivnik:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Daljnjim skraćivanjem i množenjem faktora u brojniku dobivamo broj 126.

Međutim, ova je formula korisna u sređivanju izraza u kojima se javljaju binomni koeficijenti.

2. Svojstvo simetrije

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Zaista:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Svojstvo simetrije koristimo pri računanju binomnih koeficijenata za $k > n/2$:

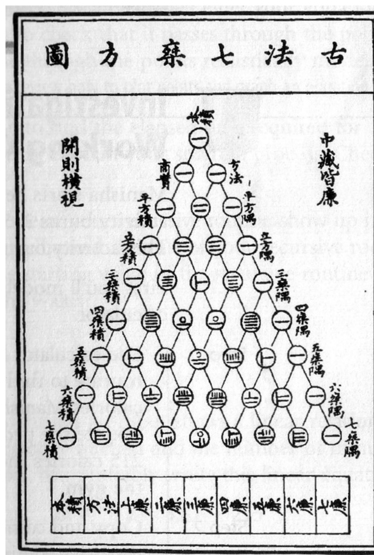
$$\binom{6}{5} = \binom{6}{6-5} = \binom{6}{1} = 6,$$

$$\binom{15}{13} = \binom{15}{15-13} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 15 \cdot 7 = 105.$$

Pascalov trokut

Izračunajmo binomne koeficijente za male vrijednosti brojeva n i izračunane vrijednosti napišimo u obliku sljedeće sheme:

$$\begin{array}{c}
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\vdots
\end{array}$$



Ovaj je trokut sa starog rukopisa zaista primjerenije nazvati kineskim...

Ovaj se trokut naziva **Pascalov** ili **kineski trokut**. Ispišimo izračunane vrijednosti s još tri dodana retka:

$$\begin{array}{lc}
n = 1 & 1 \quad 1 \\
n = 2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n = 3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n = 4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n = 5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
n = 6 & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
n = 7 & 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
 & \vdots
\end{array}$$

Iz Pascalova trokuta vidimo princip ispisivanja sljedećih redaka: svaki element tog trokuta jednak je zbroju elemenata u prethodnom retku, lijevo i desno od njega (osim rubnih elemenata koji su jednaki 1). Tako, primjerice, vrijedi

$$\binom{8}{3}+\binom{8}{4}=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\left(1+\frac{5}{4}\right)$$
$$=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\binom{9}{4}.$$

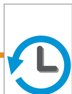
Ovo svojstvo vrijedi za bilo koji element Pascalova trokuta. To se može zapisati formulom:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}.$$

Zadatak 4. Dokaži ovu formulu!

Dokaz je najlakše načiniti prateći račun u sljedećem primjeru:

$$\binom{12}{4}+\binom{12}{5}=\frac{12!}{4!\cdot8!}+\frac{12!}{5!\cdot7!}=\frac{5\cdot12!+8\cdot12!}{5!\cdot8!}$$
$$=\frac{13\cdot12!}{5!\cdot8!}=\frac{13!}{5!\cdot8!}=\binom{13}{5}.$$



Povijesni kutak

BLAISE PASCAL



Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 19. lipnja 1623. – Pariz, 19. kolovoza 1662.) francuski je filozof, matematičar i fizičar. U šesnaestoj godini napisao je *Traité sur les sections coniques* (Rasprava o presjecima konika) u kojem proučava svojstva krivulja drugog reda. U sljedeće dvije godine konstruirao je stroj za zbrajanje i oduzimanje koji se i danas čuva u Pariškom muzeju. Prvi je točno formulirao i primjenjivao princip matematičke indukcije. Zasnovao je teoriju vjerojatnosti te sastavio shemu binomnih koeficijenata (koja je još otprije bila poznata Kinezima). U fizici je ostvario bitan doprinos u proučavanju tlakova plinova i tekućina. Opisao je ovisnost tlaka zraka o temperaturi i vlazi te se drži začetnikom meteorologije. Po njemu su dobile ime fizikalna jedinica za pritisak, kao i jedan programski jezik.

Autor je glasovitih *Lettres provinciales* (Pisma provincijalu). Kao filozof zastupa tezu o ograničenosti racionalnog mišljenja te da se osnovne istine mogu spoznati tek s pomoću snage vjere. Od 1658. do smrti odaje se vjerskim razmišljanjima rezultat kojih je djelo *Pensées* (Razmišljanja) objavljeno nakon njegove smrti.

Binomni poučak

Naziv binomnih koeficijenata i vrijednosti ispisane u Pascalovu trokutu sugeriraju vezu između tih brojeva i prikaza potencije binoma $(a+b)^n$. Za male vrijednosti broja n dobro su nam poznate formule za **potencije binoma**:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= 1\cdot a + 1\cdot b,\\
(a+b)^2 &= 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2,\\
(a+b)^3 &= 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3.
\end{aligned}
$$

Posljednje dvije nazivaju se kvadrat i kub binoma. Koeficijenti u ovim izrazima upravo su binomni koeficijenti.

Množenjem izraza za kub binoma s $a+b$ dobit ćemo sljedeću jednakost:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)\\
&= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4\\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}
$$

Uočimo da je zbroj eksponenata u svakom pribrojniku jednak eksponentu u potenciji binoma. Nadalje, koeficijenti u ovom izrazu su binomni koeficijenti iz jednog retka Pascalova trokuta.

Binomni poučak

Za svaki $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

$$
(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n.
$$

Dokaz poučka može se provesti s pomoću matematičke indukcije. Za $n = 1$, 2, 3 i 4 pokazali smo da formula vrijedi.

Korak indukcije, prijelaz s n na $n+1$ dokazuje se na identičan način poput ovog koji ćemo napraviti za prijelaz s $n=4$ na $n+1=5$:

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za broj $n=4$:

$$
(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.
$$

Pomnožimo tu jednakost s $a+b$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}(a+b)^4(a+b) &= \\ &= \left[\binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4\right](a+b) \\ &= a^5 + \binom{4}{1}a^4b + \binom{4}{2}a^3b^2 + \binom{4}{3}a^2b^3 + \binom{4}{4}ab^4 \\ &\qquad + a^4b + \binom{4}{1}a^3b^2 + \binom{4}{2}a^2b^3 + \binom{4}{3}ab^4 + \binom{4}{4}b^5.\end{aligned}$$

Koristeći svojstvo binomnih koeficijenata (svojstvo 2), grupirajući članove ove sume uz identične potencije, dobivamo:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Time je ovaj korak matematičke indukcije dokazan.

Zadatak 5. Dovrši dokaz binomnog poučka dokazujući korak indukcije za bilo koji prirodni broj n.

Primjer 5. Razvijmo po binomnoj formuli:

1)

$$\begin{aligned}(x+1)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 + \binom{5}{2}x^3 + \binom{5}{3}x^2 + \binom{5}{4}x + \binom{5}{5} \\ &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{1}{x}\right)^6 &= \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5\left(-\frac{1}{x}\right) + \binom{6}{2}x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^2 \\ &\quad + \binom{6}{3}x^3\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4}x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4 \\ &\quad + \binom{6}{5}x\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(-\frac{1}{x}\right)^6 \\ &= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}.\end{aligned}$$

Zadatak 6. **1)** Odredi realni dio kompleksnog broja $(1-i)^5$.
2) Odredi realni dio kompleksnog broja $(1+i)^7$.

Zadatak 7. Izračunaj $(2-\sqrt{3})^4$ koristeći binomnu formulu.

Znak sumacije. Opći član u razvoju binoma

Zapisivanje binomne formule možemo pojednostavniti korištenjem znaka za sumaciju $\sum$. Taj znak je grčko slovo Σ koje odgovara latinskom slovu S, i početno je slovo latinske riječi *summa* koju smo preuzeli i u hrvatskom jeziku. Znak sumacije koristi se za jednostavnije zapisivanje različitih suma. Primjerice,

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

Varijablu k nazivamo **indeks sumacije**, a ispod i iznad znaka sumacije nalaze se granice unutar kojih treba izvršiti zbrajanje: k mijenja se od 1 do 5, uzimajući za vrijednosti prirodne brojeve.

Broj pribrojnika može biti neodređen. Primjerice,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

označava zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Izraz k^2 nakon znaka sumacije naziva se **opći član**.

Zapišimo binomnu formulu s pomoću znaka sumacije. Prvi član u razvoju binoma ima oblik $\binom{n}{0} a^n b^0$, drugi $\binom{n}{1} a^{n-1} b^1, \ldots$, a $(k+1)$-vi član glasi $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. To je opći član ove sume. Stavljajući $k = 0$, $k = 1, \ldots, k = n$ dobit ćemo redom sve članove u binomnoj formuli:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Primjer 6.

Odredimo četvrti član u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3}\right)^{10}$.

To je član koji odgovara vrijednosti indeksa $k = 3$ (jer je za prvi član $k = 0$). On iznosi

$$\binom{10}{3} \left(\sqrt[3]{x}\right)^{10-3} \left(\sqrt{x^3}\right)^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{\frac{7}{3}} \cdot x^{\frac{9}{2}} = 120 \cdot x^{\frac{41}{6}}.$$

Zadatak 8. Zbroj binomnih koeficijenata prvih triju članova u raspisu potencije $(x - 2y)^n$ jednak je 46. Odredi onaj član koji sadrži $x^6 y^3$.

Zadatak 9. Koji član u raspisu potencije $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^9$ sadrži x^4 ?

Primjer 7. Odredimo onaj član razvoja $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{12}$ koji ne sadrži x.

Opći član u razvoju iznosi:

$$\binom{12}{k}x^{12-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\binom{12}{k}x^{12-k}\cdot x^{-2k}=\binom{12}{k}x^{12-3k}.$$

Tražimo onaj k za koji je eksponent jednak nuli. Iz $12-3k=0$ slijedi $k=4$. To je peti član u razvoju, a iznosi $\binom{12}{4}=495$.

Zadatak 10. U razvoju binoma $\left(x^{-\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}\right)^n$ binomni koeficijenti 3. i 7. člana međusobno su jednaki. Postoji li u ovom razvoju član koji ne sadrži x?



Kutak plus

STIRLINGOVA FORMULA

Približnu vrijednost funkcije $n!$ za velike brojeve n možemo izračunati s pomoću računala na sljedeći način. Vrijedi:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Ova se formula naziva **Stirlingova** formula. Još preciznije, vrijedi

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{1}{12n+1}}<n!<\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{1}{12n}}.$$

Za $n=100$ na taj način dobivamo ocjenu: $9.332615093\cdot10^{157}<100!<9.332621569\cdot10^{157}$, dok je točna vrijednost (računajući s 10 točnih znamenaka) $9.332621544\cdot10^{157}$.

1. Koristeći Stirlingovu formulu izračunaj približnu vrijednost broja $200!$.
2. Koliko znamenaka u dekadskom zapisu ima broj $1000!$?
3. Koristeći Stirlingovu formulu izračunaj približnu vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{100}{50}$.



Kutak plus

IDENTITETI ZA BINOMNE KOEFICIJENTE

Binomni koeficijenti zadovoljavaju mnogobrojne identitete. Većina tih formula može se dokazati s pomoću veze dvaju polinoma. Iz identiteta

$$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$$

možemo napisati:

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n\right]=\sum_{r=0}^{2n}\binom{2n}{r}x^r.$$

Polinomi slijeva i zdesna se podudaraju. Zato im se podudara koeficijent uz potenciju x^n :

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}.$$

Zbog svojstva simetrije binomnih koeficijenata, ova se jednakost može napisati na način:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

1) Rabeći jednakost $(1+x)(1+x)^n=(1+x)^{n+1}$ izvedi temeljnu rekuraziju za binomne koeficijente (na str. 28).

2) Rabeći jednakost $(1+x)^r(1+x)^s=(1+x)^{r+s}$ izvedi **Vandermondeov identitet**:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}.$$

3) Rabeći jednakost: $(1-x)^n(1+x)^n=(1-x^2)^n$, dokaži identitet:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}, & n \text{ paran}\\ 0, & n \text{ neparan}\end{cases}$$

Dokaži sljedeće identitete:

4) $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}.$

5) $\frac{1}{1}\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

6) $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+5\binom{n}{2}+7\binom{n}{3}+\ldots=2^n(n+1).$

7) $\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}=\binom{2n}{n-1}.$

8) $\binom{n}{0}\binom{n}{r}+\binom{n}{1}\binom{n}{r+1}+\ldots+\binom{n}{n-r}\binom{n}{n}=\binom{2n}{n-r}.$

Zadatci 1.3.

1. Izračunaj:

1) $7!+8!+9!$; **2)** $12!-1$;

3) $\frac{25!}{20!}$; **4)** $\frac{7!-6!}{120}$.

2. Zapiši kraće:

1) $18\cdot 17\cdot 16\cdot 15!$; **2)** $12\cdot 11\cdot 10!$;

3) $(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!$;

4) $(n-1)(n-2)(n-3)!$.

3. Skrati razlomke:

1) $\frac{15!}{13!}$; **2)** $\frac{8!}{5!}$;

3) $\frac{n!}{(n-2)!}$; **4)** $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$;

5) $\frac{(2n)!}{n!}$; **6)** $\frac{(n+k)!}{(n+k-2)!}$;

7) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$; **8)** $\frac{2n(2n-1)}{(2n)!}$.

4. Izračunaj:

1) $\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}$; **2)** $\frac{1}{8!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{6!}$;

3) $\frac{5!+4!}{3!}$; **4)** $\frac{99!-98!}{97!}$;

5) $\frac{50!}{48!}-\frac{30!}{28!}$; **6)** $\frac{50!}{49!}+\ldots+\frac{2!}{1!}+\frac{1!}{0!}$.

5. Izračunaj:

1) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; **2)** $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$;

3) $\frac{(n-1)!}{n!}+\frac{(n-2)!}{(n-3)!}$;

4) $\frac{n!}{(n-1)!}-\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$.

6. Riješi jednadžbe:

1) $\frac{(n+2)!}{n!}=72$; **2)** $\frac{k!}{(k-4)!}=\frac{2k!}{(k-2)!}$;

3) $\frac{(k+1)!}{(k-1)!}=30$; **4)** $\frac{n!-(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{6}$.

7. Odredi posljednju znamenku zbroja $1!+2!+3!+\ldots+99!$.

8. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost:

1) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$;

2) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!$
$=(n+1)!-1$.

9. Izračunaj: $\binom{10}{2}$, $\binom{9}{4}$, $\binom{18}{3}$, $\binom{10}{7}$, $\binom{12}{8}$.

10. Izravnim računom provjeri jednakosti:

1) $\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$; **2)** $\binom{12}{10}=\binom{12}{2}$;

3) $\binom{15}{8}=\binom{15}{7}$; **4)** $\binom{20}{14}=\binom{20}{6}$.

11. Izravnim računom provjeri jednakosti:

1) $\binom{8}{3}+\binom{8}{4}=\binom{9}{4}$;

2) $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\binom{11}{5}$;

3) $\binom{15}{7}+\binom{15}{8}=\binom{16}{8}$;

4) $\binom{n+1}{n-1}+\binom{n+1}{n}=\binom{n+2}{n}$.

12. Odredi prirodni broj n tako da vrijede jednakosti:

1) $\binom{n}{5}=\binom{n}{3}$; **2)** $2\binom{n}{4}=\binom{n+1}{4}$;

3) $7\binom{n}{4}=\binom{n+2}{4}$; **4)** $5\binom{n}{3}=\binom{n+2}{4}$;

5) $3\binom{2n}{n-1}=5\binom{2n-1}{n}$;

6) $17\binom{2n-1}{n}=9\binom{2n}{n-1}$.

13. Odredi prirodni broj x tako da vrijede jednakosti:

1) $2\binom{x}{4}=2\binom{x}{3}-\binom{x}{2}$;

2) $30\binom{x}{5}+8\binom{x}{4}=21\binom{x}{3}-8\binom{x}{2}$;

3) $\binom{x}{3}+\binom{x}{5}=\binom{x+1}{3}$;

4) $\binom{x}{4}+2\binom{x}{2}=\binom{x+1}{4}$.

14. Dokaži sljedeće identitete direktno, i koristeći svojstva Pascalova trokuta.

1) $\binom{n+2}{k}=\binom{n}{k-2}+2\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$, $2\leqslant k\leqslant n$;

2) $\binom{n+3}{k}=\binom{n}{k-3}+3\binom{n}{k-2}+3\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$, $3\leqslant k\leqslant n$.



15. Prikaži s pomoću binomne formule:

1) $(x-1)^4$; **2)** $(2x+1)^5$;

3) $(2x+1)^6$; **4)** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$;

5) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$; **6)** $(1+y^2)^4$;

7) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$; **8)** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6$.

16. Izračunaj:

1) $(3x+1)^4+(3x-1)^4$;

2) $(x+1)^6+(x-1)^6$.

17. **1)** Napiši tri prva člana raspisa potencije $(a-2)^{10}$.

2) Napiši tri posljednja člana raspisa potencije $(2x+1)^9$.

18. Odredi koeficijent izraza:

1) x^3y^4 u raspisu potencije $(2x-3y)^7$;

2) x^6y^3 u raspisu potencije $(x-2y)^9$;

3) x^6y^5 u raspisu potencije $(x+y)^{11}$.

19. U raspisu potencije $(4x+3)^n$ koeficijenti članova koji sadrže x^3 i x^4 su jednaki. Koliko iznose?

20. U raspisu potencije $(2x+3)^n$ koeficijenti članova koji sadrže x^5 i x^6 su jednaki. Odredi n.

21. U prikazu binoma $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ koeficijenti četvrtog i desetog člana se podudaraju. Odredi onaj član koji ne sadrži x.

22. Odredi onaj član razvoja binoma $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^3}+\sqrt[3]{a^2}\right)^{12}$ uz potenciju a^{13}.

23. U razvoju binoma odredi:

1) član s x^6 od $(x+2)^8$;

2) član s x^5 od $(\sqrt{x}+\sqrt{3})^{12}$;

3) član od $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6$ koji ne sadrži x;

4) član od $(x^{3/2}+x^{-1/2})^8$ koji ne sadrži x.

24. Odredi imaginarni dio kompleksnog broja $z=(1-i)^7$.

25. Odredi 13. član u raspisu potencije $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{15}$, gdje je i imaginarna jedinica.

26. Odredi 11. član u raspisu potencije $\left(\sqrt{2}-i\right)^{13}$, gdje je i imaginarna jedinica.

27. U raspisu potencije $\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$ je 12 članova.

1) Odredi treći član raspisa.

2) Odredi slobodni član raspisa.

28. U raspisu potencije $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ je 12 članova.

1) Odredi četvrti član raspisa;

2) Odredi slobodni član raspisa.

29. Postoji li u raspisu potencije $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)^{20}$ član koji sadrži x^7?

30. Postoji li u raspisu potencije $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$ član koji sadrži x^3?

31. Postoji li u raspisu potencije $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^9$ član koji sadrži x^4?

32. Zbroj koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana razvoja binoma $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ iznosi 37. Odredi treći član ovog razvoja.

33. Odredi zbroj koeficijenata u razvoju binoma $(5x^2-4y^3)^7$.

34. Odredi x ako je poznato da je treći član u razvoju binoma $\left(x+x^{\log x}\right)^5$ jednak 1 000 000.

1.4. Prirodni, cijeli i racionalni brojevi

U skupu prirodnih brojeva posebnu ulogu imaju prosti (prim) brojevi.

Prosti brojevi. Faktorizacija broja na proste faktore

Prirodni broj veći od 1 je **prost** ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Broj je **složen** ako nije prost, s izuzetkom broja 1 koji ne držimo niti prostim niti složenim. Nekoliko prvih prostih brojeva su 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 itd. Svaki je složeni broj nužno djeljiv s nekim prostim brojem većim od 1. Zapravo, svaki se prirodni broj može na jedinstven način napisati u obliku umnoška prostih brojeva:

$$n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m.$$

Primjerice, $15 = 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ i sl. Ovdje neki od njegovih faktora mogu biti i jednaki. Grupiramo li ih zajedno, dobit ćemo broj oblika:

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}.$$

Primjerice, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $96 = 2^5 \cdot 3$ i sl.

Primjer 1.

Koliko različitih faktora ima broj 72 (uključujući 1 i sam broj)?

Prikažimo broj 72 kao umnožak prostih faktora: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$. Svaki faktor ovog broja ima oblik $2^n \cdot 3^m$, pri čemu je $0 \leqslant n \leqslant 3$, $0 \leqslant m \leqslant 2$. Tako primjerice, za $n = 2$ i $m = 1$ dobivamo faktor $2^2 \cdot 3^1 = 12$.

Ukupan broj faktora je $4 \cdot 3$, jer postoje 4 izbora za eksponent n i 3 izbora za eksponent m. Ispiši sve te faktore poredajući ih po veličini!

Zadatak 1. Koliko različitih faktora ima broj 300?

Zadatak 2. Zbroj svih faktora nekog prostog broja jednak je 998. Koji je to broj?

Zadatak 3. Koji broj manji od 100 ima najviše različitih faktora?

Primjer 2.

Broj 1005 nije prost. Zbroj njegovih znamenaka djeljiv je s 3 pa je i sam broj djeljiv s 3. Nije prost niti broj 1006. On je paran. Jasno, nije prost broj niti 1008. A što je s brojevima 1007 i 1009? Jesu li oni prosti?

Pri provjeri je li neki broj n prost, dovoljno je ispitati njegovu djeljivost svim prostim brojevima p koji su manji ili jednaki broju $\sqrt{n}$. (Zašto?)

Broj 1007 nije djeljiv s 3 niti s 5. Izravnim dijeljenjem sa 7, 11 13 i 17 uviđamo da mu to nisu prosti faktori. Pri dijeljenju s 19, dobivamo $1007 = 19 \cdot 53$. Zato 1007 nije prost.

Provjera broja 1009 pokazuje da je on prost. Broj treba podijeliti svim prostim brojevima manjim ili jednakim 31. (Uz ovdje spomenute, treba provjeriti djeljivost s 23, 29 i 31.)

Zadatak 4. Koji su od sljedećih brojeva prosti: 901, 903, 905, 907, 909, 911? Za one koji nisu, napiši faktorizaciju na proste faktore.

Beskonačnost skupa prostih brojeva

Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Dokaz. Jednostavan dokaz ove činjenice bio je poznat još starim Grcima. Dokazujemo pretpostavivši suprotno: skup P prostih brojeva je konačan. Neka su mu elementi $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$. Načinimo broj $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m + 1$. On je veći od svih brojeva $p_1, \ldots, p_m$ i zato mora biti složen. To znači da je djeljiv s nekim prostim brojem p_j iz skupa P. Kako je istim brojem djeljiv i umnožak $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$, iz toga slijedi da je s p_j djeljiva i razlika $n - p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = 1$, što je nemoguće. Dobili smo proturječje s pretpostavkom da je skup P konačan.

Relativno prosti brojevi

Za brojeve koji nemaju zajedničkih djelitelja većih od 1 kažemo da su **relativno prosti**. Njihova **najveća zajednička mjera** (najveći zajednički djelitelj) jednak je 1, što zapisujemo ovako: $M(x, y) = 1$.

Najveću zajedničku mjeru dvaju brojeva možemo odrediti poznavajući faktorizaciju obaju brojeva. Najveća zajednička mjera sadrži zajedničke proste faktore onoliko puta koliko se nalaze i u jednom i u drugom broju.

Primjer 3.

$$M(4, 6) = M(2^2, 2 \cdot 3) = 2,$$
$$M(24, 36) = M(2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 3 = 12,$$
$$M(378, 693) = M(2 \cdot 3^3 \cdot 7, 3^2 \cdot 7 \cdot 11) = 3^2 \cdot 7 = 63,$$
$$M(72, 175) = M(2^3 \cdot 3^2, 5^2 \cdot 7) = 1.$$



Kutak plus

O PROSTIM BROJEVIMA

Otkrivanje sve većih prostih brojeva oduvijek je bio veliki izazov matematičarima. Danas to ima vrlo praktično značenje. Najvažnije metode šifriranja za slanje povjerljivih podataka elektronskim putem (poput elektroničkog plaćanja karticama) temelje se na svojstvima prostih brojeva. Ključ za šifriranje i dešifriranje poruke temelji se na odabiru prirodnog broja n koji je dobiven kao umnožak točno dvaju prostih faktora. Brojevi koji su u uporabi u standardnim algoritmima imaju preko 300 znamenaka. Razbijanje šifre svodi se na otkrivanje faktorizacije takvog broja n, što je problem koji niti računala ne mogu obaviti u razumnom vremenu.

Utrka za otkrivanjem sve većih brojeva započela je 1588. godine, kad je Pietro Cataldi provjerio da su $2^{17}-1$ i $2^{19}-1$ prosti brojevi. Ako je broj n složen, tad je djeljiv s prostim brojem koji ne premašuje $\sqrt{n}$. Cataldi je svoj račun temeljio na tablici prostih brojeva manjih od 750, što je bilo korektno jer je korijen broja $2^{19}-1$ približno broj 724. Takva je provjera mukotrpna, jer zahtijeva djeljenje sa *svim* prostim brojevima manjim od 724.

Brojevi oblika $M_p = 2^p - 1$ nazivaju se **Mersenneovi brojevi**. Da bi taj broj bio prost, nužno je da p bude prost (Dokaži tu tvrdnju!). Cataldi je tvrdio da su i brojevi 2^p-1 prosti za $p = 23$, 29, 31, 37, ali to s pomoću svoje tablice nije mogao provjeriti. Godine 1640. Pierre Fermat je pokazao da prosti djelitelji broja 2^p-1 moraju biti oblika $2kp+1$ za neki prirodni broj k. Sad je bilo vrlo jednostavno vidjeti da M_{23} nije prost, jer je djeljiv s 47 ($k=1$), M_{37} je djeljiv s 223 ($k=3$), a M_{29} s 233 ($k=4$). Da je $2^{31}-1$ uistinu prost, dokazao je L. Euler 1738. godine. Međutim, zanimljivo je da je on tvrdio da su $2^{41}-1$ i $2^{47}-1$ prosti, što nije istina.

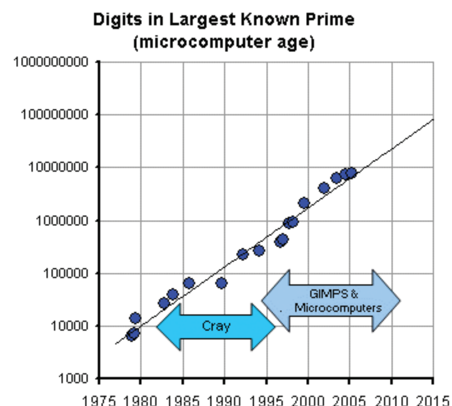
Godine 1876. Lucas je otkrio da je $2^{127}-1$ prost broj. Taj broj ima 39 znamenaka: 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727 Taj je broj ostao rekorder za narednih 75 godina, i ujedno je najveći prosti broj koji nije otkriven s pomoću računala.

Mersenneovi brojevi. Svi do danas poznati prosti brojevi oblika 2^p-1 dobivaju se za $p = 2$, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503,132049, 216091, 756839, 859433, 1 257 787 (378 632 znamenke), 1 398 269 (420 921 znamenka), 2 976 221 (895 932 znamenke), 3 021 377 (909 526 znamenaka), 6 972 593 (2 098 960 znamenaka), 13 466 917 (4 053 946 znamenaka), 20 996 011 (6 320 430 znamenaka), 24 036 583 (7 235 733 znamenaka), 25 964 951 (7 816 230 znamenaka), 30 402 457 (9 152 052 znamenaka), 32 582 657 (9 808 358 znamenaka), 37 156 667 (11 185 272 znamenaka), 42 643 801 (12 837 064 znamenaka), 43 112 609 (12 978 189 znamenaka), 57 885 161 (17 425 170 znamenaka), otkriven 25. siječnja 2013.

Broj prostih brojeva. U knjizi “*Tablice i formule: matematika, fizika, astronomija, kemija*” dan je popis prvih 3480 prostih brojeva (od 2 do 32 423). Ako je $\pi(n)$ broj prostih brojeva koji nisu veći od n, onda je $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1229$, $\pi(10^5) = 9592$, $\pi(10^6) = 78\,498$, $\pi(10^7) = 664\,579$, $\pi(10^8) = 5\,761\,455$, $\pi(10^9) = 50\,847\,534$, $\pi(10^{10}) = 455\,052\,512$. Za jako velike brojeve n, vrijedi približna formula $\pi(n) \approx \dfrac{n}{\ln n}$.

Na mrežnim stranicama `primes.utm.edu` možete pronaći tablicu prvih 15 000 000 prostih brojeva (od 2 do 275 604 541) te linkove do stranica s najnovijim otkrićima u vezi s prostim brojevima.

Zanimljivi dijagram na toj stranici pokazuje korelaciju između broja znamenaka najvećeg prostog broja i godine otkrića.



Primjer 4. Za svaki prirodni broj n broj $n^3 - n$ djeljiv je sa 6. Dokažimo.

▶ Napišimo broj u obliku

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1).$$

Brojevi $n-1$, n, $n+1$ su tri uzastopna prirodna broja. Točno jedan među njima mora biti djeljiv s 3. Barem jedan od njih djeljiv je s 2. Zato je njihov umnožak djeljiv sa 6.

Primjer 5. Dokažimo da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.

▶ Najprije imamo: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2+2)$. Ako je n djeljiv s 3, onda je ovaj broj očito djeljiv s 9. A ako n nije djeljiv s 3, tada je on oblika $n = 3k \pm 1$ te je broj $n^2 + 2$ djeljiv s 3. Naime, $(3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1)$.

Primjer 6. Dokažimo da je za svaki prirodni n broj $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ djeljiv s 11.

▶ Broj možemo napisati ovako:

$$3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 9 \cdot 9^n + 2 \cdot 64^n = 9 \cdot (11-2)^n + 2 \cdot (66-2)^n$$

Prikažemo li ove potencije s pomoću binomne formule, svaki član osim posljednjeg bit će djeljiv s 11. Posljednji pribrojnici u oba člana u zbroju daju:

$$9 \cdot (-2)^n + 2 \cdot (-2)^n = 11 \cdot (-2)^n$$

pa je čitava suma djeljiva s 11.

Zadatak 5. Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj $3^{4n} - 4^{3n}$ djeljiv sa 17.

Primjer 7. **Djeljivost sa 7.** Za djeljivost s brojem 7 nema jednostavnog pravila. Možda će nekom biti prihvatljivo ovo: udvostruči znamenku jedinica i oduzmi je od početnog broja kojemu je prekrižena znamenka jedinica. Postupak ponovi potreban broj puta. Broj je djeljiv sa 7 onda i samo onda ako je broj dobiven ovim postupkom djeljiv sa 7. Primjerice:

$$8303 \mapsto 830 - 6 = 824 \mapsto 82 - 8 = 74,$$
$$8792 \mapsto 879 - 4 = 875 \mapsto 87 - 10 = 77$$

pa 8303 nije djeljiv sa 7, a 8792 jeste. Dokažimo ovaj kriterij.

▶ Početni broj možemo napisati u obliku $10x+y$. Tu je y znamenka jedinica, a x broj dobiven iz početnog križanjem te znamenke. Sada imamo

$$10(x-2y) = 10x + y - 21y$$

Brojevi 7 i 10 su relativno prosti, pa je $10(x-2y)$ djeljiv sa 7 onda i samo onda ako je $x - 2y$ djeljiv sa 7. No, desna strana je djeljiva sa 7 onda i samo onda kad je početni broj $10x + y$ djeljiv sa 7. Time je tvrdnja dokazana.

Proširenje skupa prirodnih brojeva

Operacije zbrajanja ($+$) i množenja ($\cdot$) definirane su *u skupu prirodnih brojeva* $\mathbf{N}$. To znači da je zbroj prirodnih brojeva ponovno prirodan broj, kao i umnožak dvaju takvih brojeva. Njihova osnovna svojstva su:

$x + y = y + x,$	(komutativnost zbrajanja)
$x + (y + z) = (x + y) + z,$	(asocijativnost zbrajanja)
$x \cdot y = y \cdot x,$	(komutativnost množenja)
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$	(asocijativnost množenja)
$1 \cdot x = x,$	(neutralnost jedinice za množenje)
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$	(distributivnost množenja prema zbrajanju).

Operacije oduzimanja i dijeljenja nisu definirane u skupu prirodnih brojeva. To znači da ne možemo uvijek oduzeti ili podijeliti dva po volji odabrana prirodna broja tako da i rezultat bude prirodni broj. Zato vrlo jednostavna jednadžba

$$x + n = m$$

u kojoj su n i m prirodni brojevi, ne mora imati rješenje u skupu $\mathbf{N}$.

Da bismo uvijek mogli riješiti tu jednadžbu, moramo skup $\mathbf{N}$ proširiti nulom i negativnim cijelim brojevima. Na taj način dobivamo skup $\mathbf{Z}$ cijelih brojeva:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

U ovom, većem skupu za operacije zbrajanja i množenja vrijede ista svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti kao i u skupu prirodnih brojeva. Tim svojstvima dodajemo dva nova:

- $x + 0 = x$ (neutralnost nule za zbrajanje),
- za svaki $x \in \mathbf{Z}$ postoji $-x \in \mathbf{Z}$ takav da je $x + (-x) = 0$ (postojanje suprotnog broja).

Dakle, u skupu cijelih brojeva za svaki broj x postoji njemu **suprotan broj** $-x$ koji zbrojen s x daje nulu. Ako je x pozitivan, onda je $-x$ negativni broj iste apsolutne vrijednosti. Ako je x negativan, onda je $-x$ pozitivni broj iste apsolutne vrijednosti. Nadalje, suprotan broj suprotnog broja jednak je početnom broju: $-(-x) = x$.

Korištenjem pojma suprotnog broja u skup cijelih brojeva uvodimo *izvedenu* operaciju oduzimanja:

$$y - x := y + (-x).$$

To znači da je $y - x$ samo dogovorni jednostavniji zapis za zbrajanje broja y sa suprotnim brojem broja x.

Definicija operacije oduzimanja

Oduzimanje dvaju brojeva je zbrajanje prvog broja i suprotnog broja drugog broja.

Ovo nam svojstvo osigurava da je jednadžba

$$x + n = m$$

u kojoj su n i m cijeli brojevi, rješiva u skupu $\mathbf{Z}$. Njezino je rješenje cijeli broj $m + (-n) = m - n$.

Polje racionalnih brojeva

Ako su n i m cijeli brojevi, jednadžba

$$nx = m$$

nema uvijek rješenje u skupu cijelih brojeva.

Da obuhvatimo rješenja te jednadžbe, moramo skup cijelih brojeva proširiti razlomcima.

Racionalan broj je broj oblika $\frac{m}{n}$, pri čemu je m cijeli, a n prirodni broj. Skup svih racionalnih brojeva označavamo s $\mathbf{Q}$. Očito je $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Aksiomi polja racionalnih brojeva

U skupu racionalnih brojeva operacije zbrajanja i množenja imaju sljedeća svojstva[3]:

R_1 $\quad x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbf{Q}$
(komutativnost zbrajanja),

R_2 $\quad x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{Q}$
(asocijativnost zbrajanja),

R_3 $\quad x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbf{Q}$
(neutralnost nule za zbrajanje),

R_4 $\quad (\forall x \in \mathbf{Q})(\exists(-x) \in \mathbf{Q})\ x + (-x) = 0$
(postojanje suprotnog broja),

R_5 $\quad x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in \mathbf{Q}$
(komutativnost množenja),

R_6 $\quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{Q}$
(asocijativnost množenja),

R_7 $\quad 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbf{Q}$
(neutralnost jedinice za množenje),

R_8 $\quad (\forall x \in \mathbf{Q}, x \neq 0)(\exists x' \in \mathbf{Q})\ x' \cdot x = 1$
(postojanje recipročnog broja),

R_9 $\quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{Q}$
(distributivnost množenja prema zbrajanju).

Kažemo da skup $\mathbf{Q}$ čini **polje**.

[3] Znak $\forall$ dolazi od obratno napisanog početnog slova njemačke riječi *Alle* (svi). Čita se: za svaki. Znak $\exists$ dolazi od obratno napisanog početnog slova njemačke riječi *Existieren* (postojati), koja je nastala po latinskoj riječi istog značenja. Čita se: postoji.

Recipročni broj x' broja x je dobro nam znani broj $\frac{1}{x}$ ili x^{-1}. Tako rješenje jednadžbe

$$a \cdot x = b,$$

gdje su $a \neq 0$ i b racionalni brojevi, možemo nakon množenja s recipročnim brojem pisati u obliku:

$$\begin{aligned}
&a'(a \cdot x) = a' \cdot b\\
&(a' \cdot a)x = a' \cdot b\\
&x = a' \cdot b\\
&x = a^{-1} \cdot b = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Time smo zapravo *definirali* novu operaciju, **dijeljenje**, koja je definirana u skupu racionalnih brojeva: količnik dvaju racionalnih brojeva (s djeliteljem različitim od nule) ponovno je racionalni broj. Dijeljenje broja b racionalnim brojem a zapravo se svodi na množenje broja b brojem recipročnim broju a.

Definicija operacije dijeljenja

Dijeljenje je množenje recipročnim brojem.

Stoga, kad ističemo definiciju skupa $\mathbf{Q}$, spominjemo samo *dvije* operacije na tom skupu: zbrajanje i množenje. Druge dvije elementarne operacije, oduzimanje i dijeljenje, izvedene su operacije iz množenja i zbrajanja i predstavljaju samo jednostavniji zapis za zbrajanje sa suprotnim elementom, odnosno množenje recipročnim brojem.

Q je uređeno polje

U skupu racionalnih brojeva možemo definirati relaciju poretka $<$ ovako:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff 0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b}. \tag{1}$$

Računajući razliku (1) zaključujemo:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff 0 < \frac{bc - ad}{bd} \iff ad < bc. \tag{2}$$

(Prisjetimo se da su nazivnici u zapisu racionalnih brojeva prirodni, dakle, pozitivni brojevi.) Tako, primjerice, vrijedi: $\frac{7}{12} < \frac{3}{5}$, jer je $7 \cdot 5 < 3 \cdot 12$.



Češće promatramo sličnu relaciju poretka $\leqslant$

$$x \leqslant y \iff (x = y \quad \text{ili} \quad x < y).$$

Aksiomi relacije poretka u polju $\mathbf{Q}$

R_{10} $y \leqslant x$ ili $x \leqslant y$,
R_{11} ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, onda je $x = y$,
R_{12} ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, onda je $x \leqslant z$,
R_{13} ako je $x \leqslant y$, onda za svaki $z \in \mathbf{Q}$ vrijedi $x + z \leqslant y + z$,
R_{14} ako je $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$, onda je $0 \leqslant xy$.

Polje racionalnih brojeva je **uređeno polje**. Za svaka dva racionalna broja možemo reći jesu li oni jednaki ili je jedan od njih veći (i koji je to). Međutim, to nije uvijek jednostavno učiniti, vidi Kutak plus.

Primjer 8. Poredajmo po veličini brojeve $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{8}$, $z = \frac{4}{7}$.

Riječ je o jednostavnim brojevima (s malim brojnikom i nazivnikom) pa usporedbu neće biti teško učiniti. Pritom nećemo uspoređivati po dva broja međusobno, već ćemo, određujući najmanji zajednički višekratnik, odjednom odrediti poredak svih brojeva:

$$x = \frac{112}{168}, \qquad y = \frac{105}{168}, \qquad z = \frac{96}{168},$$

te je $z < y < x$.

Jednostavniji način za usporedbu ovih brojeva jest napisati ih u **decimalnom zapisu** koji dobivamo direktnim dijeljenjem ovih brojeva:

$$x = 0.6666\ldots \qquad y = 0.625, \qquad z = 0.57143\ldots$$



Kutak plus

USPOREDBA RACIONALNIH BROJEVA

Poredajmo po veličini brojeve:

$$x = \frac{1346269}{2178309}, \quad y = \frac{5824280}{9423883}, \quad z = \frac{10816520}{17501497}.$$

Točan odgovor je: za ove brojeve vrijedi $y = z < x$. Na koji smo način to provjerili? Brojevi su preveliki da bi se umnožak u 2) mogao izračunati s dovoljnom preciznošću na džepnom računalu. Izračunajmo umjesto toga (računalom) decimalni prikaz ovih brojeva. Dobivamo:

$$x = 0.61803398875\ldots \qquad y = 0.61803398875\ldots \qquad z = 0.61803398875\ldots.$$

Vidimo da odgovor na vrlo jednostavno pitanje može biti poprilično složen.

Decimalni prikaz racionalnog broja

Pozicijski dekadski zapis brojeva može se proširiti i na racionalne brojeve. Takav prikaz broja nazivamo **decimalni prikaz**. Tako, primjerice, broj $\frac{1}{2}$ ima decimalni prikaz 0.5, broj $\frac{11}{8}$ ima decimalni prikaz 1.375, $\frac{1}{100} = 0.01$ itd. Ove prikaze dobivamo dijeljenjem brojnika s nazivnikom.

Što je s brojem $\frac{1}{3}$? Njegov decimalni prikaz *nije konačan*. Dijeleći brojnik s nazivnikom, dobivamo za međurezultate dijeljenja brojeve 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333 itd. Dakle je

$$\frac{1}{3} = 0.333333\ldots$$

a znamenka 3 se ponavlja u beskonačnost. Ovaj broj zapisujemo još na način $0.\dot{3}$, gdje točka iznad broja pokazuje da se znamenka 3 ponavlja.

Prikaz racionalnih brojeva može biti beskonačan decimalni broj sa znamenkama koje se ponavljaju i na složenije načine. Primjerice, broj $\frac{1}{7}$ ima prikaz:

$$\frac{1}{7} = 0.1428571428571428\ldots = 0.\dot{1}4285\dot{7}.$$

Ovdje se ponavlja skupina od šest znamenaka. Kažemo da ovaj decimalni prikaz ima **period** duljine 6, a počinje neposredno iza decimalne točke. Točku stavljamo na početnu i završnu znamenku perioda. Ovakav se broj naziva **čisto periodični** decimalni broj.

Period ne mora počinjati neposredno nakon decimalne točke:

$$\frac{37}{14} = 2.6428571428571428\ldots = 2.6\dot{4}2857\dot{1}.$$

Za takav broj kažemo da ima **mješovito periodični** decimalni prikaz. Opći oblik takvog prikaza je:

$$x = \underbrace{a_k \ldots a_0}_{\text{cjelobrojni dio}} . \underbrace{b_1 \ldots b_r}_{\text{predperiod}} \underbrace{\dot{c}_1 \ldots \dot{c}_p}_{\text{period}}$$

U postupku dijeljenja dvaju prirodnih brojeva ostataka može biti samo konačno mnogo, jer su manji od djelitelja. Zato postupak dijeljenja ili završava u konačno mnogo koraka (kad se dobije ostatak nula), ili se od nekog trenutka ponavlja.

Decimalni prikaz racionalnih brojeva

Svaki racionalni broj ima konačan ili beskonačan periodični decimalni prikaz.

Vrijedi li i obratni zaključak? Odgovara li svakom periodičnom decimalnom broju racionalan broj? Odgovor je potvrdan. Pogledajmo najprije poseban slučaj kad je cjelobrojni dio jednak nuli, a decimalni dio čisto periodičan. Neka je $x = 0.\dot{2}0\dot{5}$.

$$x = 0.\dot{2}0\dot{5} = 0.205205\ldots,$$
$$10^3 \cdot x = 205.205205\ldots = 205 + 0.205205\ldots = 205 + x,$$
$$(1000x - x) = 205 \implies x = \frac{205}{999}.$$

Decimalni prikaz racionalnih brojeva, obrat

Vrijedi sljedeći prikaz:

$$0.\dot{c}_1\ldots\dot{c}_p = \frac{c_1\ldots c_p}{10^p - 1} = \frac{c_1\ldots c_p}{99\ldots9} \qquad (3)$$

Svaki periodičan decimalni zapis odgovara racionalnom broju.

Primjer 9.

$$0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \qquad 0.\dot{5} = \frac{5}{9}, \qquad 0.\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33},$$
$$0.\dot{2}3809\dot{5} = \frac{238095}{999999} = \frac{26455}{111111} = \frac{2405}{10101} = \frac{5\cdot13\cdot37}{3\cdot7\cdot13\cdot37} = \frac{5}{21},$$
$$1.\dot{4} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{9+4}{9} = \frac{13}{9},$$
$$2.\dot{0}7\dot{4} = 2 + \frac{74}{999} = \frac{2\cdot999+74}{999} = \frac{2072}{999} = \frac{56}{27}.$$

Primjer 10.

$$2.91\dot{6} = 2.91 + \frac{0.\dot{6}}{100} = \frac{291}{100} + \frac{6}{900} = \frac{291\cdot9+6}{900} = \frac{2625}{900} = \frac{35}{12},$$
$$12.15\dot{7}4\dot{0} = 12.15 + \frac{0.\dot{7}4\dot{0}}{100} = \frac{1215}{100} + \frac{740}{999\cdot100} = \frac{1215\cdot999+740}{99900}$$
$$= \frac{1214525}{99900} = (\text{kratimo s } 25) = \frac{48581}{3996} = \frac{1313}{108}.$$
$$1.24\dot{9} = 1.24 + \frac{0.\dot{9}}{100} = \frac{124}{100} + \frac{9}{9\cdot100} = \frac{124+1}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}.$$

Napomena. Prema prethodnom primjeru vidimo da decimalne brojeve s konačnim decimalnim prikazom možemo promatrati i kao brojeve s beskonačnim periodičnim prikazom, sa znamenkom 9 u periodu:

$$\frac{5}{4} = 1.25 = 1.24999\ldots = 1.24\dot{9}, \qquad 1 = 0.999\ldots = 0.\dot{9}.$$

Zadatak 6. Zapiši u obliku razlomka racionalne brojeve $1.2\dot{3}\dot{5}$, $0.01\dot{2}1\dot{2}$. Provjeri račun koristeći džepno računalo.

Primjer 11. Izračunajmo: **1)** $1.2\dot{4} + 0.62\dot{1}\dot{3}$, **2)** $3.82\dot{3} + 5.7\dot{4}\dot{2}$.

Pretvaranje broja u razlomak nepotrebno bi otežalo račun. Umjesto toga, decimalne znamenke ćemo napisati tako da periodi počinju istom decimalom i jednako dugo traju. Na taj ih način možemo zbrojiti:

1) $1.2\dot{4} + 0.62\dot{1}\dot{3} = 1.24\dot{4}\dot{4} + 0.62\dot{1}\dot{3} = 1.86\dot{5}\dot{7}$,

2) $3.82\dot{3} + 5.7\dot{4}\dot{2} = 3.82\dot{3}\dot{3} + 5.74\dot{2}\dot{4} = 9.56\dot{5}\dot{7}$.

Točan se rezultat može naslutiti uporabom džepnog računala na sljedeći način:

$$3.82333333333 + 5.74242424242 = 9.56575757575.$$

Primjer 12. Izračunajmo $0.1\dot{2}\dot{5} + 0.\dot{4}\dot{7}$

$$0.1\dot{2}\dot{5} + 0.\dot{4}\dot{7} = 0.1\dot{2}\dot{5} + 0.4\dot{7}\dot{4} = 0.5\dot{9}\dot{9} = 0.5\dot{9} = 0.6$$

Prevedi ove decimalne brojeve u razlomke i uvjeri se u točnost računa. Provedi račun i s pomoću džepnog računala.

Zadatak 7. Izračunaj $x - y$ i $x + y$ ako je $x = 1.2\dot{3}\dot{4}$, $y = 0.81\dot{5}$.



Kutak plus

FERMATOVI BROJEVI

Za $n = 0, 1, 2, 3, 4$ broj $F_n = 2^{2^n} + 1$ je prost i dobivamo redom brojeve 3, 5, 17, 257, 65537. Na osnovi toga je P. Fermat tvrdio da su ti brojevi prosti za svaki prirodni broj n. Međutim, L. Euler je 1732. god. pokazao da je već sljedeći broj $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ djeljiv s 641, $F_5 = 641 \cdot 6\,700\,417$. Do danas nije pronađen niti jedan novi prost Fermatov broj, a za mnoge se zna da su složeni (npr. svi brojevi za $5 \leqslant n \leqslant 16$). U binarnom zapisu Fermatovi brojevi imaju prikaze 11, 101, 10001, 100000001, 100...001 (15 znamenka 0) itd. Ti su brojevi zanimljivi jer je poznato da se pravilni mnogokut, čiji je broj stranica prost broj, može konstruirati ravnalom i šestarom onda i samo onda ako je broj njegovih stranica Fermatov broj. Tako se, primjerice, mogu konstruirati pravilni trokut i peterokut, ali ne može sedmerokut. Ovu je tvrdnju dokazao Gauss, a tome u spomen svjedoči postolje njegovog spomenika u obliku pravilnog 17-terokuta.

Zadatci 1.4.

1. Ispitaj koji su od sljedećih brojeva prosti: 237, 839, 929, 5833, 17 947, 22 279, 28 709.

2. Uvjeri se da su svi brojevi između 26960 i 26980 složeni.

3. Napiši faktorizaciju sljedećih prirodnih brojeva: 312, 556, 1001, 5828, 12481.

4. Neka je tvrdnja T: Ako je broj oblika $111\ldots11$ prost, onda mu je broj znamenaka prost broj.

1) Dokaži ovu tvrdnju.

2) Iskaži obratnu tvrdnju. Je li ona istinita?

3) Vrijedi $111 = 3 \cdot 37$. Je li to u suprotnosti s tvrdnjom T? Objasni svoj zaključak?

4) Vrijedi $1111 = 11 \cdot 101$. Je li to u suprotnosti s tvrdnjom T?

5) Pokušaj pronaći barem dva prosta broja ovog oblika. Za to će biti nužna pomoć računala.

5. Koristeći algoritam djeljivosti brojem 7, ustanovi koji su od sljedećih brojeva djeljivi sa 7

1) 10002000300020001;

2) 10003000400030001;

3) 10004000500040001;

4) 40004000300020001.

(Brojevi su veliki da se do rezultata ne bi došlo neposrednim dijeljenjem na džepnom računalu.)

6. Na koji način, koristeći džepno računalo, možeš riješiti prethodni zadatak s pomoću samo dva dijeljenja?

7. **Djeljivost s 13**. Broj je djeljiv s 13 onda i samo onda ako je s 13 djeljiv broj dobiven ovom transformacijom: znamenka jedinica broja se učetverostruči i doda početnom broju kojemu je prekrižena znamenka jedinica (ovaj se postupak može ponoviti). Dokaži ovaj kriterij.

8. Koristeći algoritam iz prethodnog zadatka, ustanovi koji je od sljedeća dva broja djeljiv s 13: $x = 1000010000100007$ ili $y = 1000010000100009$? (Brojevi su veliki da se do rezultata ne bi došlo neposrednim dijeljenjem na džepnom računalu.)

9. Na koji način, koristeći džepno računalo, možeš riješiti prethodni zadatak s pomoću samo dva dijeljenja?

10. Ako je zbroj prvih n prirodnih brojeva za 187 veći od zbroja prvih $2n$ prirodnih brojeva, koliki je zbroj prvih $3n$ prirodnih brojeva?

— ◆ —

11. Ako umnošku četiriju uzastopnih cijelih brojeva dodamo 1, dobit ćemo kvadrat nekog cijelog broja. Dokaži!

12. Dokaži da broj $n^2 - 8$ nikad nije djeljiv s 5.

13. Jesu li brojevi 4^{4^4}, 5^{5^5}, 9^{9^9} potpuni kvadrati?

14. Rastavljanjem na faktore dokaži: $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$, za sve $n \in \mathbf{N}$.

— ◆ —

15. Koliki mogu biti djelitelj i količnik u postupku dijeljenja cijelih brojeva ako je djeljenik 557, a ostatak 85?

16. Koliki mogu biti djelitelj i ostatak u postupku dijeljenja cijelih brojeva ako je djeljenik 1517, a količnik 75?

17. Povećanjem djeljenika za 52, a djelitelja za 4, količnik i ostatak se nisu promijenili. Izračunaj količnik.

18. Odredi najmanji četveroznamenkasti broj koji pri dijeljenju s 2 daje ostatak 1, pri dijeljenju s 3 ostatak 2, pri dijeljenju s 5 ostatak 4, a pri dijeljenju sa 7 ostatak 6.

19. Za koje je cijele brojeve x, y i z ispunjena jednakost

$$(x-2)\cdot(y+1)\cdot(z-3) = 1?$$

20. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 3024.$$

21. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbe:

1) $x^2 - y^2 = 105$;

2) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$;

3) $x + y = xy$;

4) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

22. Aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka je 11. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

23. Aritmetička sredina 27 brojeva je 72. Ako su dva od tih 27 brojeva brojevi 13 i 41, kolika je aritmetička sredina ostalih 25 brojeva?

24. Odredi broj c ako je $a:b=3:2$, $b:c=3:5$, te $a+b+c=\frac{25}{36}$.

25. Broj 1708 podijeli na tri dijela a, b i c tako da bude $a:b=3:5$ i $a:c=1:2$.

26. Ako je $a:b=2:3$, $b:c=1:2$, koliko je $\frac{a-b}{a+b}:\frac{b-c}{b+c}$?

27. Ako je omjer razlike, zbroja i umnoška dvaju brojeva jednak $1:2:6$, koliki je količnik tih brojeva?

28. Broj 750 podijeli na dva dijela tako da 8 % prvog dijela zajedno s 24 % drugoga čini 11.2 % od danog broja.



29. Koji je broj veći: $A=\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{9}$ ili $B=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}$?

30. Koji je broj veći: $A=1+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ ili $B=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{2}{81}$?

31. Koji je broj veći:

1) $A=\frac{54\,311\,215}{54\,311\,216}$ ili $B=\frac{45\,311\,521}{45\,311\,522}$;

2) $A=\frac{1\,234\,512\,345}{4\,567\,845\,678}$ ili $B=\frac{1\,234\,512\,346}{4\,567\,845\,679}$?

32. Ako je $a<b$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, onda je $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$. Dokaži!

33. Dokaži; ako je $a+b\geqslant 1$, onda je i $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.



34. Odredi 100. decimalu u decimalnom zapisu racionalnih brojeva $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{4}{7}$.

35. Odredi period u decimalnom zapisu racionalnih brojeva $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{7}$. U svakom od primjera odredi 150. decimalu.

36. Zapiši u obliku razlomka racionalne brojeve

$$a=0.363636\ldots$$
$$b=0.135135135\ldots$$
$$c=0.133213321332\ldots$$

37. Zapiši u obliku razlomka racionalne brojeve $a=0.\dot{6}\dot{3}$, $b=0.\dot{1}3\dot{5}$, $c=0.\dot{1}2\dot{5}$.

38. Dani su racionalni brojevi $a=0.531531531\ldots$, $b=0.873873873\ldots$ Prikaži zbroj $a+b$ i razliku $a-b$ u obliku razlomka.

39. Izračunaj $a+b$ i $a-b$ za brojeve $a=2.13\dot{4}$, $b=3.2\dot{2}\dot{5}$.

40. Koliko je $a:b$ ako je $a=0.875$, $b=1.\dot{2}\dot{7}$?

41. Napiši umnožak brojeva $a=0.91\dot{6}$ i $b=0.\dot{3}\dot{6}$ u obliku razlomka.



42. Za koje je cijele brojeve m razlomak $\frac{m^2-2m+1}{m+2}$ cijeli broj?

43. Ako je $x^{-1}=3^{-1}+4^{-1}$, koliko je x?

44. Odredi x ako je

1) $x^{-2}=\frac{1}{3^{-2}}+\frac{1}{4^{-2}}$; **2)** $x^{-2}=\frac{1}{3^{-2}+4^{-2}}$.

45. Odredi brojeve x i y ako je $x^{-1}+y^{-1}=5$ i $x^{-1}\cdot y^{-1}=6$.

46. Napiši sedam racionalnih brojeva koji dijele interval $\left[\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]$ na osam jednakih dijelova.

47. Napiši decimalni prikaz nekog racionalnog broja koji se nalazi unutar intervala $\left[\frac{23}{77},\frac{24}{77}\right]$.

48. Nađi neki broj između $\frac{4}{7}$ i $\frac{5}{7}$ koji je kvadrat nekog racionalnog broja. Koliko rješenja postoji?

1.5. Realni brojevi

U svakodnevnom računu obično se koristimo prirodnim, cijelim i ponekad racionalnim brojevima (kroz razlomke ili decimalne brojeve). Međutim, mnoga računanja imaju za rezultat novu vrstu brojeva, koju su ljudi u prošlosti nazvali **iracionalnim**. Tako primjerice, površina kruga kojemu je duljina promjera prirodan broj nije racionalan broj. Isto vrijedi i za njegov opseg.

Još od starogrčke matematike poznato je da je *dijagonala kvadrata nesumjerljiva s njegovom stranicom*. Prevedeno na jezik brojeva, time se iskazuje tvrdnja da je dijagonala kvadrata kojemu je stranica 1 iracionalan broj. Uistinu, ta dijagonala iznosi $\sqrt{2}$, a dobro je poznato da taj broj nije racionalan.

Primjer 1. Ako je p prost broj, dokažimo da $\sqrt{p}$ nije racionalan.

Pretpostavimo suprotno: za prirodne brojeve m i n vrijedi $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$. Pritom brojeve m i n po potrebi skratimo tako da na koncu budu relativno prosti. Onda kvadriranjem dobivamo

$$p = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{tj.} \qquad n^2p = m^2.$$

Lijeva je strana djeljiva s p, pa je to onda i desna strana. Kako je p prost, to je moguće samo onda kad je m djeljiv s p. Zato vrijedi $m = kp$ za neki prirodni broj k, pa dobivamo

$$n^2p = k^2p^2 \qquad \text{tj.} \qquad n^2 = k^2p.$$

Sad na isti način zaključujemo da je i n djeljiv s p, što je proturječje s pretpostavkom da su m i n relativno prosti. Zato $\sqrt{p}$ ne može biti racionalan.

Zadatak 1. Dokaži da je $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ iracionalan broj.

Primjer 2. Ako n nije potencija broja 10, onda je $\log n$ iracionalan.

Pretpostavimo suprotno: $\log n = \frac{p}{q}$, gdje su p i q relativno prosti prirodni brojevi. Ova jednakost ekvivalentna je jednakosti $10^p = n^q$. No ona je nemoguća, ako n nije potencija broja 10. Zato je pretpostavka koja je do nje dovela pogrešna, pa $\log n$ nije racionalan.

Zadatak 2. Dokaži da je $\log_3 2$ iracionalan broj.

Realne brojeve dobivamo upotpunjujući skup racionalnih brojeva — dodajući mu iracionalne brojeve — ali tako da na novom skupu vrijede sva svojstva algebarskih operacija koja su vrijedila među racionalnim brojevima. Postoje dva jednostavna načina na koja možemo intuitivno pojmiti realne brojeve:

Opis skupa realnih brojeva

1. Geometrijski opis. Skup realnih brojeva možemo poistovjetiti s brojevnim pravcem: svakom realnom broju odgovara jedna točka brojevnog pravca i obratno — svakoj točki s brojevnog pravca odgovara jedan realni broj.

2. Algebarski opis. Skup realnih brojeva sadrži sve decimalne brojeve oblika

$$\pm a_0.b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$$

pri čemu je a_0 neki prirodni broj (cjelobrojni dio), a b_1, $b_2\ldots$ znamenke decimalnog prikaza.

Zapamtimo da svaki racionalni broj ima *konačan ili beskonačan periodični decimalni zapis*. Prema tome, broj zapisan beskonačnim *neperiodičnim* decimalnim prikazom mora biti iracionalan.

Intervali. Omeđeni i neomeđeni skupovi

Najjednostavniji podskupovi brojevnog pravca su intervali. Postoje četiri tipa intervala:

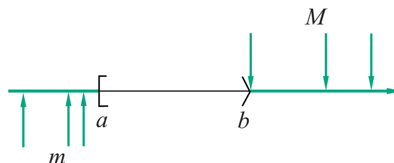
$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \quad \text{(zatvoreni interval – segment)},$$
$$\langle a,b\rangle = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\} \quad \text{(otvoreni interval)},$$
$$[a,b\rangle = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x < b\} \quad \text{(poluotvoreni interval)},$$
$$\langle a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leqslant b\} \quad \text{(poluotvoreni interval)}.$$

Interval I određen je svojim rubnim točkama a i b. a se naziva početak ili donji rub intervala, a b je završetak ili gornji rub tog intervala. Ovdje je $a < b$. Samo kod zatvorenog intervala može se dopustiti da bude $a = b$, pri čemu je interval $[a,a]$ zapravo skup $\{a\}$ koji sadrži samo točku a.

Moguće je da pojedina granica intervala bude beskonačna. Primjerice, ako je $b = \infty$, onda vrijedi $[a,\infty\rangle = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x\}$, a za $a = -\infty$ imamo, na primjer, $\langle -\infty, b\rangle = \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$. I čitav skup $\mathbf{R}$ je interval: $\langle -\infty, \infty\rangle = \mathbf{R}$.

S vrstom rubnih točaka povezan je pojam omeđenosti intervala. Interval je **omeđen** ako su mu rubovi a i b konačni realni brojevi.

Svaki broj $m \leqslant a$ naziva se **donja međa**, a svaki broj $M \geqslant b$ naziva se **gornja međa** intervala I.



interval i primjeri njegovih donjih i gornjih međa

Ako je neki od rubova intervala a, b jednak $-\infty$ ili ∞, onda je interval **neomeđen**. Tako je, primjerice, interval

$$[1, \infty\rangle = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant 1\}$$

neomeđen, jer nije omeđen odozgo. Interval

$$\langle -\infty, -2\rangle = \{x \in \mathbf{R} : x < -2\}$$

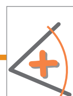
je neomeđen, jer nije omeđen odozdo.



Pojmovi omeđenosti te donje i gornje međe proširuju se i na po volji uzete podskupove brojevnog pravca.

Donja međa skupa S je svaki broj m manji ili jednak bilo kojem elementu skupa S. **Gornja međa** skupa S je svaki broj M veći ili jednak bilo kojem elementu skupa S.

Naglasimo odmah da, kao i za intervale, donja i gornja međa nekog skupa ne moraju postojati.



Kutak plus

DECIMALNI PRIKAZ IRACIONALNIH BROJEVA

Brojevi $\sqrt{2}$ i π su iracionalni, pa je njihov decimalni prikaz neperiodičan. Zakon nizanja njihovih znamenaka nam je nepoznat:

$$\sqrt{2} = 1.41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 69807\ 85696\ \ldots$$

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ \ldots$$

Na temelju ovih znamenaka ne znamo odrediti niti sljedeću znamenku njihovog prikaza.

S druge strane, lako je opisati decimalni prikaz mnogih iracionalnih brojeva. Takvi su, primjerice:

$$0.1234567891011121314151617181920212223242526\ldots$$

$$0.1010010001000010000010000001000000010000000\ldots$$

U prvom su slučaju napisani redom svi prirodni brojevi, u drugom potencije 10^n za $n \geqslant 1$. Oba su ova prikaza neperiodična, jer se u jednom i u drugom može pronaći niz istovjetnih znamenaka po volji odabrane duljine, dakle dulji od bilo kojeg unaprijed zadanog perioda.

Omeđeni skupovi

Neprazan podskup S brojevnog pravca je **omeđen** ako postoje brojevi m i M takvi da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$m \leqslant x \leqslant M.$$

Dakle, svaki omeđeni skup ima konačnu donju i gornju među. U protivnom, za skup kažemo da je **neomeđen**.

Minimum, maksimum, supremum i infimum skupa

Među mogu ali ne moraju pripadati skupu. S tim u vezi definiramo pojmove supremuma i maksimuma nekog skupa:

Supremum skupa

Supremum skupa S jest broj β sa svojstvima:

1) β je *gornja međa* skupa S

2) β je najmanja gornja međa.

Pišemo $\beta = \sup S$. Ako skup nije omeđen odozgo, onda supremum ne postoji pa stavljamo $\sup S = \infty$.

Ako supremum β pripada skupu S, onda za njega kažemo da je **maksimum** skupa S i pišemo $\beta = \max S$.

Analogno ovom, definira se pojam infimuma i minimuma skupa:

Infimum skupa

Infimum skupa S jest broj α sa svojstvima

1) α je *donja međa* skupa S.

2) α je najveća donja međa.

Pišemo $\alpha = \inf S$. Ako skup nije omeđen odozdo, onda stavljamo $\inf S = -\infty$.

Ako α pripada skupu S, onda za njega kažemo da je **minimum** skupa S i pišemo $\alpha = \min S$.

Primjer 3.

Uvjerimo se da za omeđene intervale vrijedi:

$$\begin{aligned}
&I = [a, b], && a = \min I, \quad b = \max I,\\
&I = \langle a, b], && a = \inf I, \quad b = \max I,\\
&I = [a, b\rangle, && a = \min I, \quad b = \sup I,\\
&I = \langle a, b\rangle, && a = \inf I, \quad b = \sup I.
\end{aligned}$$

Koje svojstvo karakterizira supremum? Supremum je *najmanja gornja međa* skupa. To znači da svaki broj manji od supremuma više nije gornja međa tog skupa.

Jednako tako, infimum je *najveća donja međa* skupa. To znači da svaki broj veći od infimuma više nije donja međa tog skupa.

Primjer 4.

Navedimo nekoliko primjera podskupova brojevnog pravca i odredimo njihove gornje ili donje međe. Istaknimo pripadaju li one skupu ili mu ne pripadaju.

$$\begin{aligned}
&S = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 4], && \inf S = 0, && \max S = 4,\\
&S = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}, && \inf S = -\sqrt{2}, && \sup S = \sqrt{2},\\
&S = \{y \in \mathbf{R} : y = -x^2 + 2,\ x \in \mathbf{R}\}, && \inf S = -\infty, && \max S = 2,\\
&S = \mathbf{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}, && \min S = 1, && \sup S = \infty.
\end{aligned}$$

Primjer 5.

Odredimo infimum, supremum, minimum i maksimum skupa

$$S = \{x^2 + 1 : x \in \mathbf{R},\ -1 < x < 2\}.$$

U rubnim točkama intervala, funkcija $f(x) = x^2 + 1$ uzima vrijednosti $f(-1) = 2$, $f(2) = 5$. Koordinate tjemena ove parabole su $(0, 1)$. Zato funkcija preslikava interval $\langle -1, 2\rangle$ u interval $S = [1, 5\rangle$. Prema tome je

$$\inf S = \min S = 1, \qquad \sup S = 5.$$

Maksimum skupa S ne postoji.

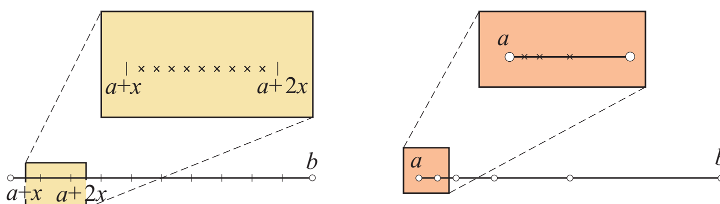
Skup racionalnih brojeva je gust

Udaljenost dvaju uzastopnih cijelih brojeva iznosi 1. To znači da u intervalu duljine manje od 1 postoji najviše jedna cjelobrojna točka.

Položaj racionalnih brojeva na brojevnom pravcu bitno je drukčiji. Pokazat ćemo da između svakih dvaju racionalnih brojeva postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Više je mogućih dokaza. Obrazložimo dva slična razmišljanja.

Ako su brojevi a i b racionalni, tada je racionalan i broj $x = \frac{b-a}{10}$. Promotrimo brojeve a, $a+x$, $a+2x \ldots a+10x = b$. Svi su oni racionalni i leže unutar intervala $[a,b]$. Točno je 11 takvih brojeva. Stavimo sad $x = \frac{b-a}{100}$. Ponovno su brojevi oblika a, $a+x$, $a+2x \ldots a+100x = b$ racionalni brojevi unutar intervala $[a,b]$. Njih je sada 101. Dijeleći razliku $b-a$ na sve više dijelova, zaključujemo da možemo pronaći po volji mnogo racionalnih brojeva unutar ovog intervala.

Pogledajmo još jednu konstrukciju. Podijelimo interval $[a,b]$ na dva jednaka dijela. Djelišna točka iznosi $x = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ i to je racionalan broj. Sad možemo interval $[a,x]$ ponovno podijeliti na dva jednaka dijela; djelišnoj točki odgovara racionalni broj.



Između svakih dvaju racionalnih brojeva postoji još beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

U svakom koraku možemo sve prethodne intervale podijeliti na pola djelišnim točkama koje su racionalni brojevi. Tako unutar intervala $[a,b]$ pronalazimo jednu, pa dvije, četiri, osam, šesnaest itd. racionalnih točaka. Prema tome, između svakih dvaju racionalnih brojeva postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Slična tvrdnja vrijedi i za odnos realnih i racionalnih brojeva.

Gustoća skupa racionalnih brojeva

Između svakih dvaju racionalnih brojeva postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Između svakih dvaju realnih brojeva postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Kažemo da su racionalni brojevi **gusti** na brojevnom pravcu.

Skup R je potpun

Aksiom potpunosti skupa realnih brojeva

R_{15} U skupu $\mathbf{R}$ svaki omeđeni podskup ima infimum i supremum.

Po ovom se svojstvu razlikuje skup realnih brojeva od skupa racionalnih brojeva. Naime, takvo svojstvo ne vrijedi u skupu racionalnih brojeva!

Skup racionalnih brojeva nije potpun

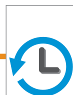
Supremum i infimum omeđenog podskupa racionalnih brojeva ne mora biti racionalan broj.

Ilustracija za to je sljedeći skup racionalnih brojeva

$$\{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}.$$

Njegov infimum je broj $-\sqrt{2}$, a supremum $\sqrt{2}$ i to nisu racionalni brojevi.

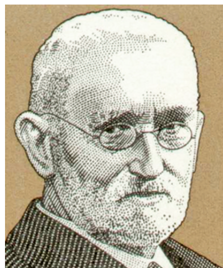
Zorno to zamišljamo prihvaćajući da unutar skupa racionalnih brojeva (shvaćenih kao točke brojevnog pravca) postoje šupljine. Te šupljine upravo su iracionalni brojevi. S druge je strane skup realnih brojeva **potpun**, on nema šupljina. To zamišljamo tako da svakoj točki brojevnog pravca odgovara neki realni broj.



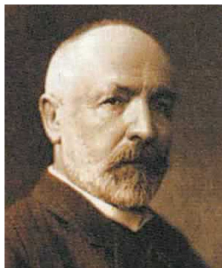
Povijesni kutak

REALNI BROJEVI

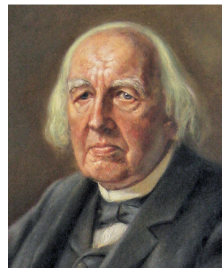
Realni su brojevi precizno opisani relativno kasno, tek krajem 19. st. Za to su najzaslužniji njemački matematičari Wilhelm Dedekind (1831. – 1916.), Georg Cantor (1845. – 1918.) i Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815. – 1897.).



W. Dedekind



G. Cantor



K. T. W. Weierstraß

Strogi opis skupa realnih brojeva dobivamo propisujući *sustav aksioma* koje realni brojevi moraju zadovoljavati, a koji su dovoljni da potpuno opišu skup realnih brojeva. To su svojstva $R_1 - R_{14}$, navedena pri opisu racionalnih brojeva. Ona se moraju nadopuniti aksiomom R_{15} o potpunosti skupa realnih brojeva.

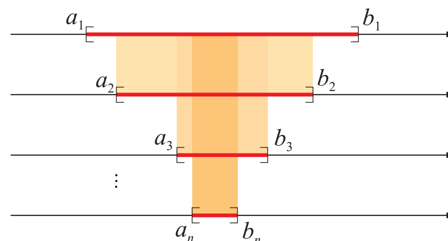
Potpunost skupa realnih brojeva obično ilustriramo jednim svojstvom niza padajućih zatvorenih intervala. Neka je $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_3 = [a_3, b_3]$, $I_4 = [a_4, b_4] \ldots$ zadani niz padajućih intervala:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \ldots$$

Tad postoji realni broj koji je sadržan u svim intervalima. Preciznije možemo kazati da je presjek ove familije intervala ponovno zatvoreni interval koji se može stegnuti u točku.

Svojstvo padajućih intervala

Niz padajućih zatvorenih intervala ima neprazan presjek u skupu realnih brojeva.



Niz padajućih intervala ima neprazan presjek u skupu realnih brojeva.

Svojstvo potpunosti skupa realnih brojeva povezano je s decimalnim zapisom realnih brojeva.

Primjer 6.

Izračunajmo prvih nekoliko decimala broja $\sqrt{2}$.

Odredit ćemo ih probom. Tražimo niz decimalnih brojeva kojima će kvadrat biti manji od 2. Brojeve pritom biramo tako da svaki sljedeći ima jednu decimalu više i da budu najveći s traženim svojstvom:

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4 \qquad x_1 = 1,$$
$$1.4^2 = 1.96 < 2 < 1.5^2 = 2.25 \qquad x_2 = 1.4,$$
$$1.41^2 = 1.9881 < 2 < 1.42^2 = 2.0164 \qquad x_3 = 1.41,$$
$$1.414^2 \approx 1.9993 < 2 < 1.415^2 \approx 2.0022 \qquad x_4 = 1.414 \text{ itd.}$$

U svakom koraku možemo procijeniti udaljenost broja $\sqrt{2}$ i njegove aproksimacije konačnim decimalnim brojem. Kako svaka sljedeća aproksimacija ima jednu točnu znamenku više, vrijedi, primjerice:

$$|\sqrt{2}-1.41|<0.01, \quad |\sqrt{2}-1.414|<0.001, \quad |\sqrt{2}-1.4142|<0.0001 \ldots$$

Što ćemo dobiti 'na kraju' ovog postupka? U svakom koraku otkrivamo jednu novu znamenku broja $\sqrt{2}$, zato na kraju očekujemo prikaz oblika

$$\sqrt{2} = a_0.b_1b_2b_3\ldots = 1.414213562\ldots$$

To je **decimalni prikaz** iracionalnog broja $\sqrt{2}$.

Uz svaki prikaz realnog broja povezan je padajući niz intervala (svaki sljedeći možemo izabrati da bude deset puta manji) koji se stežu oko zadanog realnog broja. Intervali koji određuju decimale broja $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ su:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= [1, 2],\\
I_2 &= [1.4, 1.5],\\
I_3 &= [1.41, 1.42],\\
I_4 &= [1.414, 1.415],\\
I_5 &= [1.4142, 1.4143],\\
I_6 &= [1.41421, 1.41422],\\
I_7 &= [1.414213, 1.414214] \text{ itd.}
\end{aligned}
$$

U presjeku svih tih intervala *nalazi se samo broj* $\sqrt{2}$. Vidimo da je za pripadne intervale u skupu $\mathbf{Q}$ presjek prazan.

Koristeći decimalni prikaz po volji odabranog realnog broja x, vidimo da vrijedi istovjetan rezultat:

Realni broj je presjek padajućeg niza intervala

Za svaki realni broj x postoji padajući niz intervala $[a_1, a_1'] \supset [a_2, a_2'] \supset [a_3, a_3'] \supset \ldots$ u čijem se presjeku nalazi samo broj x. Pri tome brojeve a_n, a_n' možemo odabrati tako da budu racionalni.



Točno-netočno pitalice

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Ne postoji najmanji pozitivni racionalni broj. T N

2. Između svaka dva iracionalna broja postoji barem jedan racionalan. T N

3. Između svaka dva racionalna broja postoji barem jedan iracionalan. T N

4. Ako u decimalnom prikazu racionalnog broja postoje znamenke različite od nule, taj broj nikad nije cijeli. T N

5. Suprotan broj $-x$ racionalnog broja $x \neq 0$ uvijek je negativan. T N

6. Recipročan broj $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, racionalnog broja $x \neq 1$ nikad nije cijeli broj. T N

7. Ako za realni broj vrijedi $x < 1$, onda je $\dfrac{1}{x} > 1$. T N

8. Ako su x i y iracionalni brojevi, onda su i $x + y$ i $x - y$ iracionalni. T N

9. Ako su $x + y$ i $x - y$ racionalni brojevi, onda su i x i y racionalni. T N

Zadatci 1.5.

1. Dokaži da je broj $\sqrt{3}$ iracionalan. Dokaži da su iracionalni i brojevi $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{2}$.

2. Dokaži da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.

3. Ako su x i y prirodni brojevi takvi da je barem jedan od brojeva $\sqrt{x}$ ili $\sqrt{y}$ iracionalan, onda je iracionalan i broj $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Dokaži!

4. Dokaži: broj $a+b\sqrt{2}$ je iracionalan broj za svaka dva racionalna broja a i b, $b \neq 0$.

5. Dokaži: ako broj $\sqrt[n]{a}$, gdje je $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, te $a \in \mathbf{N}$, nije prirodan broj, on je iracionalan.

6. Dokaži da je broj $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan.

7. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni:

1) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; **2)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

3) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$; **4)** $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

8. Dokaži da su brojevi

1) $(1-\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})$;

2) $(\sqrt{3}+1)^2(4-2\sqrt{3})$;

3) $(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

racionalni.

9. Dokaži da su sljedeći brojevi racionalni:

1) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

4) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

6) $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$.

10. Brojeve $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ i $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$ prikaži u obliku $x+\sqrt{y}$.

11. Dokaži da su brojevi

1) $0.1234567891011\ldots$

2) $0.14916253649\ldots$

3) $0.248163264128\ldots$

4) $0.121221222122221\ldots$

iracionalni.

12. Odredi sve $x \in Q$ za koje je broj $\sqrt{4x^2+x-1}$ racionalan broj.

13. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni:
1) $\log_2 3$; **2)** $\log_{18} 36$.

14. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni;
1) $\cos 15^\circ$; **2)** $\sin 15^\circ$; **3)** $\operatorname{tg} 5^\circ$; **4)** $\cos 20^\circ$.

15. Dokaži da je broj $\cos 1^\circ$ iracionalan.

16. Dokaži da je $\operatorname{tg} 1^\circ$ iracionalan broj.

— ◆ —

17. Izračunaj:

1) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$;

3) $\left[16^{-0.25}-(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right]\left[16^{-0.25}+(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right]$;

4) $\left[9^{-\frac{1}{2}}+(3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}\right]\left[9^{-\frac{1}{2}}-(3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}\right]$.

18. Dokaži:

1) $\dfrac{\sqrt{8}-|1-\sqrt{2}|}{|2-\sqrt{2}|-|\sqrt{8}-3|}=3+2\sqrt{2}$;

2) $\dfrac{|3-\sqrt{3}|-|5-\sqrt{27}|}{|\sqrt{27}-3|+|1-\sqrt{3}|}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$;

3) $\dfrac{|4-\sqrt{18}|+|3-\sqrt{8}|}{|4-\sqrt{2}|-|\sqrt{8}-3|}=3-2\sqrt{2}$;

4) $\dfrac{|3-\sqrt{12}|-|\sqrt{3}-1|}{|\sqrt{27}-5|+|2\sqrt{3}-7|}=4\sqrt{3}-7$.

19. Riješi jednadžbe:

1) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x$;

2) $\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x$;

3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}$;
4) $\sqrt[3]{1-x}=1-\sqrt{x}$;
5) $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}=5$;
6) $x-1=\sqrt{2x^2-3x-5}$;
7) $\sqrt{8+x}\cdot\sqrt{8-x}=x$.

20. Racionaliziraj nazivnik sljedećih razlomaka:

1) $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$;
3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

21. Koliko je
$|1-\sqrt{2}|-|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{4}|-\ldots-|\sqrt{99}-\sqrt{100}|$?

22. Riješi jednadžbu $x\cdot\lfloor x\rfloor=28$.

23. Izračunaj:
$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{49}\rfloor+\lfloor\sqrt{50}\rfloor$.

24. Za koji je najmanji cijeli broj k umnožak
$2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{3}{2}}\cdot2^{\frac{5}{2}}\cdot\ldots\cdot2^{\frac{2k-1}{2}}$ veći od 256?

25. Izračunaj: $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

— ◆ —

26. Izračunaj broj $\sqrt{5}$ točno na 4 decimale služeći se računalom, ali koristeći samo operaciju množenja.

27. Koristeći samo operacije zbrajanja i množenja odredi $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ s točnošću od 4 decimale.

28. Odredi niz uklopljenih intervala unutar kojih se nalazi broj $\sqrt[3]{2}$. Dopušteno je koristiti se džepnim računalom, primjenjujući samo operacije množenja. Na taj način odredi broj $\sqrt[3]{2}$ s preciznošću od 5 znamenaka.

29. Napiši neki iracionalan broj koji leži u intervalu $[0.12600011, 0.12600025]$.

— ◆ —

30. Odredi najmanji interval koji sadrži skupove

1) $\{x^2 : 1<x\leqslant 3\}$; 2) $\{x^2 : -1<x\leqslant 3\}$;
3) $\{x^2-3x : 2<x\leqslant 3\}$;
4) $\{x^2-3x : 1<x\leqslant 3\}$;
5) $\{x^2-3x : -1<x\leqslant 3\}$;
6) $\{x : x^2-2x\leqslant 3\}$.

31. Odredi infimum, supremum, minimum i maksimum (ako postoje) sljedećih podskupova u $\mathbf{R}$:

1) $S=\{x\in\mathbf{Z} : -6\leqslant x<3\}$;
2) $S=\{x\in\mathbf{Q} : -6\leqslant x<3\}$;
3) $S=\{x\in\mathbf{R} : -6\leqslant x<3\}$;
4) $S=\{x\in\mathbf{R} : -6\leqslant x^2<3\}$;
5) $S=\{x\in\mathbf{R} : x=\dfrac{m}{n},\ m,n\in\mathbf{N},\ m<n\}$.

32. Odredi infimum, supremum, minimum i maksimum (ako postoje) sljedećih podskupova u $\mathbf{R}$:

1) $S=\{x\in\mathbf{N} : 1\leqslant e^x<20\}$;
2) $S=\{x\in\mathbf{Q} : 1\leqslant e^x<20\}$;
3) $S=\{x^2\in\mathbf{R} : -1<x<3\}$;
4) $S=\{x^2\in\mathbf{R} : 1<x<3\}$.

33. Utvrdi imaju li sljedeći skupovi minimum, maksimum i odredi njihov infimum i supremum:

1) $S=\left\{n-\dfrac{1}{n} : n\in\mathbf{N}\right\}$;
2) $S=\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n} : n\in\mathbf{N}\right\}$;
3) $S=\left\{\dfrac{n}{n+1} : n\in\mathbf{N}\right\}$.

1.6. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Algebarski prikaz kompleksnog broja

Rješenja jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ nisu realni brojevi. Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ proširit ćemo do skupa kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ tako da mu priključimo imaginarnu jedinicu: rješenje ove jednadžbe. **Imaginarna jedinica** i je takav kompleksan broj za koji vrijedi $i^2 + 1 = 0$, tj. $i^2 = -1$. Pritom zahtijevamo da i u novom skupu vrijede sva pravila $R_1 - R_9$ za računske operacije zbrajanja i množenja u skupu $\mathbf{R}$.

Skup kompleksnih brojeva

Skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ sadrži sve brojeve oblika

$$z = x + yi, \tag{1}$$

gdje su x i y realni brojevi. x nazivamo **realni dio**, a y **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Prikaz (1) naziva se **algebarski prikaz** kompleksnog broja z.

Algebarske operacije

U skupu kompleksnih brojeva definirane su algebarske operacije zbrajanja i množenja koje imaju svojstvo komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti. S pomoću zbrajanja i množenja možemo definirati i izvedene algebarske operacije oduzimanja i dijeljenja.

Formule za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva ne treba pamtiti, već se ove operacije izvode kao s algebarskim izrazima, uvažavajući činjenicu da je $i^2 = -1$.

Primjer 1.

Izvršimo naznačene operacije:

$$(4 + 2i) + (-3 + i) = 1 + 3i,$$

$$(3 - \sqrt{2}i) - (\sqrt{2} + i) = 3 - \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1)i,$$

$$(5 + 3i) \cdot 2i = 10i + 6i^2 = -6 + 10i,$$

$$(3 + 2i)(1 - 2i) = 3 + 2i - 6i - 4i^2 = 7 - 4i,$$

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i,$$

$$(1 + 2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i.$$

Primjer 2.

Vrijedi: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$. Dalje se račun ponavlja.

Svaki se prirodni broj n može napisati u obliku $n = 4k + r$, gdje je r ostatak pri dijeljenju s 4, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Tada je:

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = i^r.$$

Primjerice, $i^{23} = i^{4\cdot5} \cdot i^3 = i^3 = -i$, $i^{2010} = i^{4\cdot502+2} = i^2 = -1$ i slično.

Neka je $z = x + yi$ bilo koji kompleksni broj. Sa $\overline{z}$ označavamo broj

$$\overline{z} := x - yi. \tag{2}$$

Za brojeve z, $\overline{z}$ kažemo da čine par **kompleksno-konjugiranih** brojeva. Za umnožak takvih dvaju brojeva vrijedi

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2. \tag{3}$$

Dakle *umnožak kompleksnog broja i njemu kompleksno-konjugiranog broja je uvijek realan nenegativan broj*. Nadalje, $z \cdot \overline{z} = 0$ ako i samo ako je $x = 0$ i $y = 0$, dakle, $z = 0$.

Pri dijeljenju kompleksnih brojeva koristimo tu činjenicu u postupku koji je analogan onom kod racionalizacije iracionalnih izraza:

Primjer 3.

Podijelimo kompleksne brojeve:

$$\frac{3-5i}{2i} = \frac{3-5i}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{3i-5i^2}{2i^2} = \frac{3i+5}{-2} = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i,$$

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{3+2i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+2i+6i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{-1+8i}{5}$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i.$$

Kompleksna ravnina

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara uređeni par realnih brojeva (x, y). Želimo li grafički prikazati kompleksni broj, prirodno je takvom broju pridružiti točku $M(x, y)$ u ravnini. Tako skup $\mathbf{C}$ možemo poistovjetiti s ravninom u koju je uveden Kartezijev koordinatni sustav.

Os Ox Kartezijeva sustava u ravnini naziva se **realna os** u $\mathbf{C}$. Na njoj (i samo na njoj) leže realni brojevi. Os Oy naziva se **imaginarna os** i ona sadrži **imaginarne brojeve** — kompleksne brojeve čiji je realni dio jednak nuli. Ovu ravninu nazivamo **kompleksna ravnina** ili **Gaussova ravnina**.



Povijesni kutak

KARL FRIEDRICH GAUSS

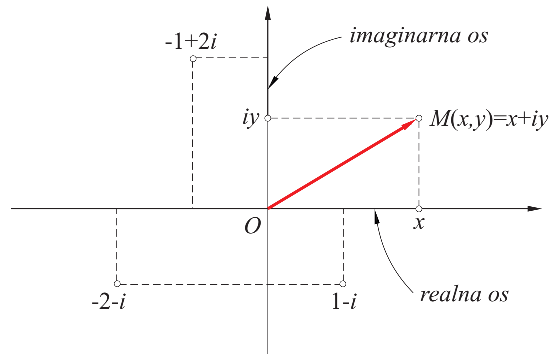


Karl Friedrich Gauß (Braunschweig, 30. travnja 1777. – Göttingen, 23. veljače 1855.) po mnogima najveći matematičar svih vremena (lat. *princeps mathematicorum*). S 19 godina riješio je problem konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta. S 22 godine prvi je dokazao osnovni stavak algebre, po kojem svaki polinom ima barem jednu (kompleksnu) nul-točku. Djelom *Disquisitiones arithmeticæ* (1801.) postavio je osnove suvremenoj teoriji brojeva. Bitno je doprinio svim područjima matematike tako da mnogi pojmovi i tvrdnje nose njegovo ime. Od 1807. g. vodi katedru matematike i astronomije na Göttingenškom sveučilištu i upravlja mjesnom zvjezdarnicom. Bio je i veliki praktičar. S 24 godine izračunao je putanju planetoida Ceresa koji se bio izgubio iz vida nedugo nakon što je bio otkriven, a zatim i planetoida Palade. Priredio je i matematičke tablice koje su bile u uporabi preko sto pedeset godina.

Vrijednost

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

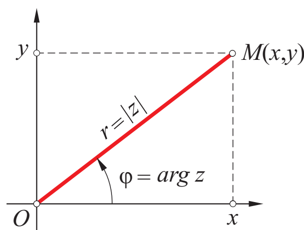
nazivamo **modul** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja. Vrijednost $|z|$ označava udaljenost točke $T(x, y)$ od ishodišta koordinatnog sustava, a $|z_1 - z_2|$ udaljenost dviju točaka $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ koje odgovaraju kompleksnim brojevima z_1 i z_2.



Svakoj točki $M(x, y)$ Kartezijeve ravnine odgovara kompleksni broj $z = x + iy$. Na osi apscisa nalaze se realni brojevi, na osi ordinata imaginarni.

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Pokazat ćemo kako se složene operacije s kompleksnim brojevima (množenje, dijeljenje, potenciranje, korjenovanje) mogu jednostavnije računati ako izaberemo drukčiji, ponešto neobičan prikaz kompleksnog broja. Taj se prikaz zasniva na koordinatnom sustavu u ravnini koji se razlikuje od Kartezijeva — na **polarnom sustavu**.



Položaj točke M opisuju Kartezijeve koordinate (x, y), ali i polarne koordinate (r, φ).

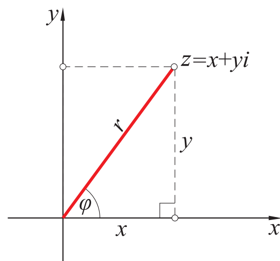
Neka je $M(x, y)$ točka Gaussove ravnine koja odgovara broju $z = x + iy$, pri čemu je $z \neq 0$. Njezin položaj možemo odrediti i s pomoću sljedećih dvaju podataka:

- udaljenosti r točke do ishodišta O,
- kuta φ između spojnice OM i pozitivnog dijela x-osi.

Broj r je realan pozitivni broj, a za mjeru kuta φ uzimamo vrijednost unutar intervala $[0, 2\pi\rangle$. r i φ nazivaju se **polarne koordinate** kompleksnog broja z (slika). Te su koordinate jednoznačno određene točkom z. Vrijedi i obrat: ako su r_1 i φ_1 polarne koordinate broja z_1, a r_2 i φ_2 polarne koordinate broja z_2 pa je $r_1 \neq r_2$ ili $\varphi_1 \neq \varphi_2$, onda je nužno $z_1 \neq z_2$ (Razmisli zašto!). Za broj $z = 0$ vrijedi $r = 0$, a kut φ nije određen.

Primjer 4.

Za broj $z = 1 + i$ vrijedi $r = \sqrt{2}$, jer je to udaljenost točke $T(1, 1)$ do ishodišta. Također $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Nacrtaj sliku!



veza između Kartezijevih i polarnih koordinata

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Kartezijeve i polarne koordinate vezane su relacijama:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{5}$$

Prikaz kompleksnog broja z u obliku

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi). \tag{6}$$

naziva se **trigonometrijski prikaz** broja z.

Modul r kompleksnog broja iznosi:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{7}$$

Kut φ nazivamo **argument** kompleksnog broja i označavamo s $\varphi = \arg(z)$ i određujemo iz veze:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{8}$$

Jednadžbom (8) kut φ nije potpuno određen. Naime, ova jednadžba ima dva rješenja unutar intervala $[0, 2\pi\rangle$ (koja se međusobno razlikuju za π). Koje je od njih ‘pravo’, određujemo s pomoću predznaka brojeva x i y, odnosno na osnovi informacije o kvadrantu u kojem se nalazi broj z. Ako je $x = 0$, tada je broj imaginaran, pa je njegov argument $\pi/2$ za $y > 0$, odnosno $3\pi/2$ za $y < 0$.

Primjer 5. Prikažimo u trigonometrijskom obliku sljedeće brojeve:

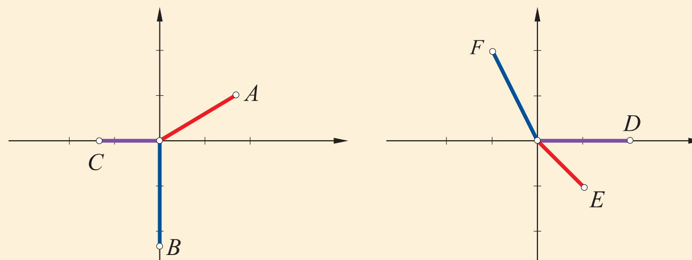
1) $\sqrt{3}+i$; **2)** $-2i$; **3)** $-\sqrt{2}$; **4)** 2;
5) $1-i$; **6)** $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$; **7)** $-1-\sqrt{3}\,i$; **8)** $-1+2i$.

1) $$\left.\begin{aligned} r &= |\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2,\\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6},\ \varphi = \frac{\pi}{6}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow z = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big)$$

2) $r = |-2i| = 2;\quad \varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ te je $z = 2\Big(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\Big)$

3) $r = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2},\quad \varphi = \pi,\ z = \sqrt{2}\big(\cos\pi + i\sin\pi\big)$

4) $r = |2| = 2,\quad \varphi = 0,\ z = 2\big(\cos 0 + i\sin 0\big)$



određivanje trigonometrijskog prikaza kompleksnog broja

5) $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Vrijedi $\operatorname{tg}\varphi = -1$, a kako je broj u četvrtom kvadrantu, vrijedi $\varphi = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$, te slijedi:
$z = \sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\Big)$.

6) $r = \sqrt{2+2} = 2$. Vrijedi ponovno $\operatorname{tg}\varphi = -1$, ali je broj u drugom kvadrantu pa je $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Dakle $z = 2\Big(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\Big)$.

7) $r = \sqrt{1+3} = 2$. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$. Kut je u trećem kvadrantu pa je $\varphi = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Dakle $z = 2\Big(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\Big)$.

8) $r = |-1+2i| = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\varphi = -2$. Iz $\operatorname{tg}\varphi = 2$ slijedi $\varphi = 63^\circ 26' 6''$. Broj je u drugom kvadrantu pa je $\varphi = 180^\circ - 63^\circ 26' 6'' = 116^\circ 33' 54''$. Dobivamo $z = \sqrt{5}(\cos 116^\circ 33' 54'' + i\sin 116^\circ 33' 54'')$ (vidi sliku).

Zadatak 1. Zapiši u trigonometrijskom obliku brojeve $z_1 = 2-2i$, $z_2 = -1+3i$.

Primjer 6.

Prikažimo u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve:

1) $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$; **2)** $z = -2\cos\frac{\pi}{6} - 2i\sin\frac{5\pi}{6}$.

1) Broj z možemo zapisati u obliku $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$. Modul broja z jednak je 1. Valja još odrediti njegov argument. No, broj je u kompleksnoj ravnini smješten u IV. kvadrant pa je $\arg(z) = \varphi = \frac{5\pi}{3}$.

2) Broj z možemo zapisati u obliku $z = 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Modul broja z jednak je 2. Broju z u kompleksnoj ravnini je pridružena točka u III. kvadrantu pa je $\arg(z) = \varphi = \frac{7\pi}{6}$.

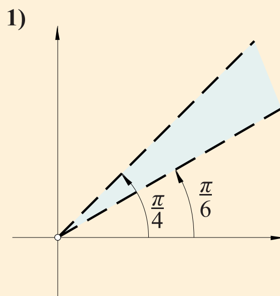
Tako je konačno $z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

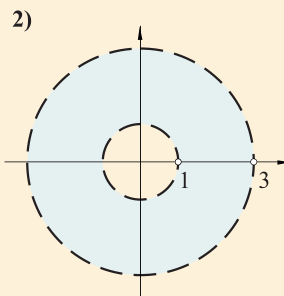
Primjer 7.

Odredimo sve točke kompleksne ravnine za koje je

1) $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$; **2)** $1 < |z| < 3$.

1) Neka je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Vrijedi $\varphi = \arg z$. Uvjetom $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ postavljen je samo uvjet na kut φ, ali ne i na modul r. Dakle, r može biti bilo koji, a φ se mora nalaziti unutar intervala $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$. Traženi je skup kut u kompleksnoj ravnini određen zrakama $\varphi = \frac{\pi}{6}$ i $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (slika lijevo).





2) Prikažimo ponovno kompleksni broj z u trigonometrijskom obliku: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Sada je $|z| = r$ i uvjet prelazi u $1 < r < 3$, dok nema ograničenja na kut φ. Stoga je uvjetom određen kružni prsten na slici desno. Rubovi nisu uključeni u područje.

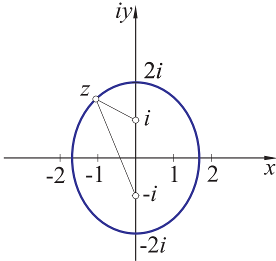
Primjer 8.

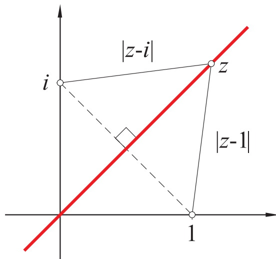
Odredimo skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetima

1) $|z-1| = |z-i|$; **2)** $|z-i| + |z+i| = 4$.

1) Ovaj skup čine sve točke koje su jednako udaljene od $(1,0)$ i $(0,1)$. Taj je skup pravac, simetrala dužine kojoj su $1=(1,0)$, $i=(0,1)$ krajnje točke.

$$|z-1| = |z-i|,$$
$$(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2,$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1,$$
$$-2x = -2y,$$
$$y = x.$$





2) Ovaj skup čine sve točke $z = x + yi$ za koje je zbroj udaljenosti do točaka i, $-i$ jednak 4. Riječ je o elipsi sa žarištima u $i = (0,1)$ i $-i = (0,-1)$, čiju jednadžbu možemo dobiti ovako:

$$|x + (y-1)i| + |x + (y+1)i| = 4,$$
$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4,$$
$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2},$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2},$$
$$y + 4 = 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2},$$
$$y^2 + 8y + 16 = 4x^2 + 4y^2 + 8y + 4,$$
$$4x^2 + 3y^2 = 12.$$

Množenje kompleksnih brojeva

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja vrlo je pogodan za opis operacije množenja, a onda potenciranja i korjenovanja kompleksnih brojeva.

Izaberimo bilo koja dva kompleksna broja (različita od nule) i prikažimo ih u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = r_1\big(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\big),$$
$$z_2 = r_2\big(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\big).$$

Korištenjem adicijskog teorema za trigonometrijske funkcije, za njihov umnožak dobivamo izraz:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2\big(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1\big)\big(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2\big) \\ &= r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &\qquad + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2] \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Formule (9) predstavljaju trigonometrijski prikaz broja z_1z_2. Njegov je modul r_1r_2, a argument $\varphi_1+\varphi_2$. Zato vrijedi

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \tag{10}$$

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{11}$$

Množenje kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi prikazani u trigonometrijskom obliku množe se tako da im se pomnože moduli, a argumenti zbroje:

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Zadatak 2. Izračunaj umnožak brojeva

$$z_1 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big), \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\Big).$$



Kutak plus

NEJEDNAKOSTI U SKUPU C

Možemo li za dva kompleksna broja reći koji je veći, a koji manji? Je li broj $4+3i$ veći od $1+2i$?

U skupu kompleksnih brojeva *ne postoji relacija poretka* koja ima svojstva $R_{10}-R_{14}$ relacije poretka u skupu realnih brojeva. Ta svojstva govore da za svaki broj $z \neq 0$ mora vrijediti točno jedna od relacija $z<0$ ili $z>0$. Nadalje, relacija poretka ima sljedeće svojstvo:

$$z<0 \implies 0<-z.$$

Zaista, po svojstvu R_{13} slijedi

$$z<0 \implies z+(-z)<0+(-z) \qquad \text{tj.} \quad 0<-z.$$

Ako u polju kompleksnih brojeva postoji relacija poretka $\leqslant$, tada za broj i mora vrijediti $i<0$ ili $0<i$. U posljednjem slučaju, po R_{14} vrijedilo bi $0<i^2=-1$, što je proturječje. Ako je pak $i<0$, tada je $0<-i$ i odavde $0<(-i)^2=-1$, pa ponovno dobivamo isto proturječje.

Prema tome, nije moguće definirati relaciju poretka u polju kompleksnih brojeva. Stoga kompleksne brojeve ne možemo uspoređivati po veličini.

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Formula slična onoj za množenje vrijedi i za operaciju dijeljenja.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\big(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\big)}{r_2\big(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\big)} \\ &= \frac{r_1\big(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\big)}{r_2\big(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\big)} \cdot \frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} \\ &= \frac{r_1\big(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\big)\big(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\big)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \qquad (12)\end{aligned}$$

Iz ovog prikaza vidimo da je modul ovog broja $\frac{r_1}{r_2}$, a argument $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \qquad (13)$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve dijelimo tako da im podijelimo module, a argumente oduzmemo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Primjer 9.

Izračunajmo $\dfrac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}$.

▶ Prikažimo brojeve u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned}1 + i &= r_1\Big(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big), \\ 1 - i\sqrt{3} &= r_2\Big(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\Big) = 2\Big(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\Big), \\ 1 - i &= r_3\Big(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\Big), \\ \sqrt{3} + i &= r_4\Big(\cos\varphi_4 + i\sin\varphi_4\Big) = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big).\end{aligned}$$

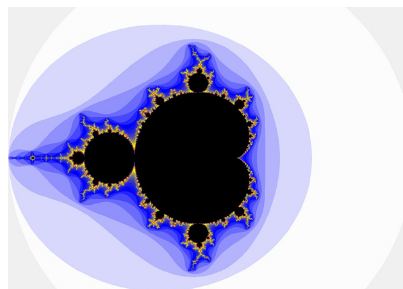
Stoga je traženi broj jednak:

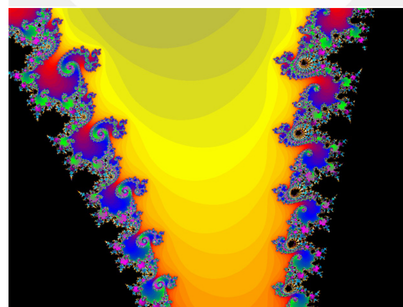
$$\begin{aligned}&\frac{r_1 r_2}{r_3 r_4}\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)\Big) \\ &= 1 \cdot \Big[\cos\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\Big)\Big] \\ &= \cos 0 + i\sin 0 = 1.\end{aligned}$$

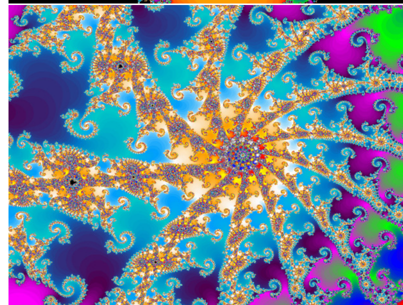


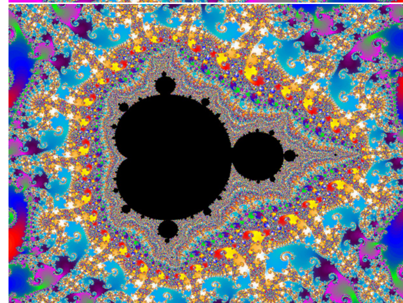
Kutak plus

FRAKTALI







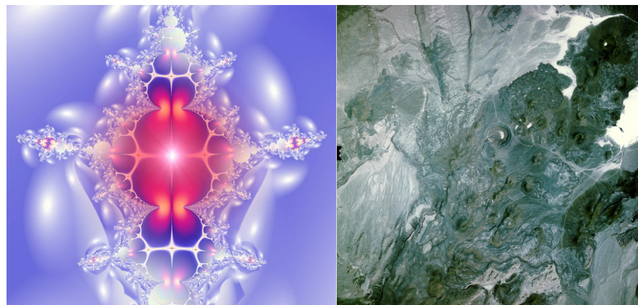


Teorija **fraktala** je jedna od najnovijih teorija kojim su matematičari obogatili svijet. Vjerojatno niti jedno drugo područje moderne matematike nije imalo toliki utjecaj kod "laika" poput ovog. Razlog je više nego jasan. Geometrijska interpretacija fraktala stvara dotad neviđene slike u kojima se miješa imaginacija zamišljenih svjetova s detaljima koje priroda stvara svuda oko nas. List paprati, plod cvjetače (da ne spominjemo šenon — križanca cvjetače i brokule....) morska obala, zorni su primjeri kako je fraktalno ponašanje ugrađeno u prirodne zakone.

Što je to fraktal? Neprecizna, ali intuitivno jasna definicija kaže da je fraktal lik čijim se povećavanjem otkriva sve veća i veća složenost.

Slike na ovoj stranici dobro opisuju tu složenost. Slike u desnom stupcu predstavljaju dijelove istog fraktala, vjerojatno najpoznatijeg od svih, **Mandelbrotova skupa**. Ime je dobio po začetniku ove teorije **Benoitu Mandelbrotu** (rođen u Varšavi, 1924., školovan u Francuskoj). Taj se lik dobiva promatranjem rekurzivnog niza kompleksnih brojeva $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$. Ovisno o ponašanju tog niza (modulu n-tog člana) svakoj se točki z_0 pridijeli jedna boja iz unaprijed priređene palete. Fraktalno svojstvo skupa očituje se u njegovoj izrazito nepravilnoj granici. Uočit ćete da duboko unutar Mandelbrotova skupa postoje mali djelići koji su po obliku potpuno slični čitavom skupu. Svaka sljedeća slika tek je neznatni djelić prethodne (Možete li otkriti na kojem mjestu?). Prva slika obuhvaća 3.1×10^9 puta veću površinu od četvrte slike! Moglo bi se pronaći barem milijun različitih zanimljivih slika istog reda veličine, skrivene unutar početne slike. Daljnjim smanjivanjem, taj broj neograničeno raste.

Izborom različitih rekurzivnih formula $z_{n+1} = f(z_n)$ dobivaju se mnogi drugi fraktali. Stotine mrežnih stranica posvećene su fraktalima. Potraži galerije slika fraktala na internetu.



Druga slika u gornjem redu nije računalno generirana, već snimka mjesečevog kratera u infracrvenom dijelu spektra.

Zadatci 1.6.

1. Izračunaj:

1) $(3-5i)+(-2+3i)$;

2) $(3-2i)(1+i)(2+3i)$;

3) $(3+2i)^3$;

4) $(2+i)^4$;

5) $1+i+i^2+\ldots+i^9+i^{10}$;

6) $(1+i^{50})(1-i^{51})$;

7) $\dfrac{i}{i-1}+\dfrac{i+1}{i}$;

8) $\dfrac{i-1}{i-2}+\dfrac{i+1}{i+2}$.

2. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

1) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$; **2)** $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;

3) $\left(\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$.

3. Pokaži da operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva imaju sljedeća svojstva:

$z_1+z_2=z_2+z_1$,
(komutativnost zbrajanja)

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,
(asocijativnost zbrajanja)

$z_1z_2=z_2z_1$,
(komutativnost množenja)

$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$,
(asocijativnost množenja)

$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.
(distributivnost množenja).

4. Odredi skup svih točaka z u kompleksnoj ravnini koje se mogu prikazati u obliku $z=\cos t+i\sin t$.

5. Neka je $w=\dfrac{z-1}{z+1}$, $z\neq\pm1$. Dokaži da je $\operatorname{Re} w=0$ ako i samo ako je $|z|=1$.

6. Odredi skup svih točaka z u kompleksnoj ravnini za koje je $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^2$ realan.

7. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\overline{z}=z^3$.

8. Odredi skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetima

1) $\operatorname{Im} z^2=2$; **2)** $|z-i|+|z+i|=4$;

3) $|z-1|=|z-i|$; **4)** $\operatorname{Re}(1+z)=|z|$;

5) $|z-3|+|z+3|=8$; **6)** $|z-1|-|z+1|=1$;

7) $\operatorname{Re}\dfrac{z-2}{z-2i}=0$; **8)** $\operatorname{Im}\dfrac{z-2}{z-2i}=0$;

9) $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$; **10)** $\operatorname{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_1}=0$.

9. Odredi skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetima

1) $|z-1|>1$; **2)** $|z-3i+2|>2$;

3) $1\leqslant|z-i|\leqslant3$; **4)** $\pi<\arg z<3\pi/4$;

5) $|z|>2+\operatorname{Im} z$; **6)** $|2z|>|1+z^2|$.



10. Prikaži u Gaussovoj ravnini sljedeće brojeve:

1) $z=\cos\pi+i\sin\pi$;

2) $z=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

3) $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

4) $z=\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$;

5) $z=3\left(\cos\dfrac{11\pi}{3}+i\sin\dfrac{11\pi}{3}\right)$.

11. Odredi i nacrtaj točke zadane polarnim koordinatama r i φ:

1) $\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$; **2)** $\left(2,-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$; **4)** $(2,\pi)$;

5) $\left(1,-\dfrac{\pi}{2}\right)$; **6)** $\left(3,\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

7) $\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$; **8)** $\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

12. Za točke iz prethodnog zadatka odredi Kartezijeve koordinate.

13. Odredi argumente kompleksnih brojeva:

1) $z = -1 + i$; **2)** $z = -1 - i\sqrt{3}$;

3) $z = \sqrt{3} - i$; **4)** $z = -\frac{1}{2} + 3i$.

14. Odredi modul i argument i zapiši u trigonometrijskom obliku sljedeće brojeve:

1) i; **2)** $-2i$; **3)** 4;

4) -6; **5)** $-1 + i$; **6)** $-1 - i\sqrt{3}$;

7) $1 + 2i$; **8)** $3 - 2i$.

15. Zapiši u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

1) $z = 1 - i$; **2)** $z = -i$;

3) $z = \sqrt{2}$; **4)** $z = \sqrt{3} + i$;

5) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; **6)** $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. Kompleksne brojeve

1) $z_1 = 2\cos\frac{7\pi}{4} - 2i\sin\frac{\pi}{4}$;

2) $z_2 = -\cos\frac{\pi}{17} + i\sin\frac{\pi}{17}$;

3) $z_3 = -2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

4) $z_4 = -3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$;

5) $z_5 = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

zapiši u trigonometrijskom obliku.

17. Zapiši u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

1) $z = 3\cos\frac{11\pi}{4} - 3i\sin\frac{5\pi}{4}$;

2) $z = -\cos\frac{\pi}{11} + i\sin\frac{\pi}{11}$;

3) $z = 3\left(\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}\right)$;

4) $z = -\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4} - i\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{4}$;

5) $z = 1 + \cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}$;

6) $z = 1 - \cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}$.

18. Izračunaj:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

2) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{3}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$;

5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$.

19. Koliko je:

1) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)}{0.5(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)}$;

2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}$?

20. Zapiši u trigonometrijskom obliku brojeve:

1) $z = \dfrac{i - 1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$;

2) $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2i\left(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}$;

3) $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{i\left(\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}$;

4) $z = \dfrac{i - 1}{i\left(1 - \cos\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\frac{2\pi}{5}}$.

21. Odredi umnožak i kvocijent brojeva napisanih u trigonometrijskom obliku:

1) $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,
$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,
$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$,
$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{21} + i\sin\frac{\pi}{21}\right)$.

1.7. Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Potenciranje kompleksnih brojeva

Pokazali smo da se kompleksni brojevi z_1 i z_2 množe ovako:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Uvrstimo ovdje $z_1 = z_2$. Dobivamo

$$z^2 = r^2\big(\cos 2\varphi + i\, \sin 2\varphi\big). \tag{1}$$

Primjenom iste formule slijedi:

$$\begin{aligned} z^3 = z^2 \cdot z &= r^2\big(\cos 2\varphi + i\, \sin 2\varphi\big) \cdot r\big(\cos \varphi + i\, \sin \varphi\big) \\ &= r^3\big(\cos 3\varphi + i\, \sin 3\varphi\big). \end{aligned}$$

Indukcijom ćemo dobiti općenitu formulu.

Potenciranje kompleksnih brojeva

Potencija broja z napisanog u trigonometrijskom obliku, računa se **de Moivreovom**[4] **formulom**:

$$z^n = r^n\big(\cos n\varphi + i\, \sin n\varphi\big). \tag{2}$$

Iz nje čitamo:

$$|z^n| = |z|^n, \tag{3}$$

$$\arg(z^n) = n \arg z. \tag{4}$$

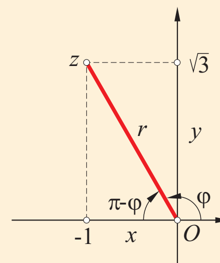
Primjer 1.

Izračunajmo $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

Prikažimo $-1+i\sqrt{3}$ u trigonometrijskom obliku. On se nalazi u drugom kvadrantu i vrijedi

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.$$



Dakle, $r = 2$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$:

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\, \sin\frac{2\pi}{3}\Big).$$

[4] Abraham de Moivre, (1667. – 1754.) engleski matematičar

Sada možemo primijeniti de Moivreovu formulu (2):

$$\begin{aligned}(-1+i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60}\left[\cos\left(60\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(60\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\ &= 2^{60}\left[\cos(40\pi)+i\,\sin(40\pi)\right]=2^{60}.\end{aligned}$$

Zadatak 1. Ako je $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$, koliko je $z_1^3\cdot z_2^2$?

Korjenovanje kompleksnih brojeva

S pojmom korjenovanja upoznali smo se još u prvom razredu, kad smo govorili da je to operacija inverzna operaciji potenciranja. Međutim, ograničili smo se na korjenovanje pozitivnih realnih brojeva, pri čemu takav korijen ima samo jednu vrijednost i ta je vrijednost pozitivan realni broj. Tako, primjerice, vrijedi $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}=2.236\ldots$ itd. Isto se događa za bilo koji parni korijen pozitivna broja, primjerice $\sqrt[4]{16}=2$, $\sqrt[6]{16}=1.587\ldots$. Govorili smo da i neparni korijen također ima samo jednu vrijednost, međutim, ona može biti i negativna: $\sqrt[3]{8}=2$, ali $\sqrt[3]{-8}=-2$. Ovako izračunane vrijednosti korijena nazivamo **aritmetički korijen** realnog broja.

Pojam korijena vezan je uz rješavanje nekih jednadžbi. Tako primjerice, jednadžba $x^2-3=0$ ima *dva realna rješenja*, od kojih je jedno $\sqrt{3}$, a drugo suprotnog predznaka, $-\sqrt{3}$. Jednadžba $x^2+4=0$ ima također dva rješenja suprotnih predznaka: $2i$ i $-2i$. U ovom slučaju pri rješavanju moramo odrediti vrijednost korijena negativnog broja -4.

Korijen kompleksnog broja

n-ti korijen kompleksnog broja z je svako rješenje jednadžbe $w^n=z$. Pišemo $w=\sqrt[n]{z}$.

Ovaj se pojam korijena razlikuje od prije navedenog *aritmetičkog korijena* (iako se zapisuje na isti način).

Primjer 2. Odredimo sve brojeve w za koje je $w^3=8$.

Traženi brojevi su rješenja jednadžbe $w^3-8=0$. Kako je to jednadžba trećeg stupnja, očekujemo da će ona imati tri rješenja. Ta su rješenja ujedno nul-točke polinoma w^3-8. Jedna njegova nul-točka je $w_1=2$. Dijeljenjem polinoma sa $w-2$ dobivamo, po formuli za razliku kubova

$$w^3-8=(w-2)(w^2+2w+4).$$

Preostale dvije nul-točke dobivamo rješavajući jednadžbu

$$w^2 + 2w + 4 = 0 \implies w_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3},$$

i to su kompleksni brojevi.

Uvjerimo se da za njih uistinu vrijedi $w^3 = 8$. Imamo:

$$(-1+i\sqrt{3})^3 = (-1)^3+3(-1)^2 i\sqrt{3}+3(-1)i^2(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3 i^3$$
$$= -1 + 3\sqrt{3}i + 9 - 3\sqrt{3}i = 8.$$

Na isti se način dobiva $(-1 - i\sqrt{3})^3 = 8$.

Prema tome, treći korijen u skupu kompleksnih brojeva ima tri različite vrijednosti:

$$w^3 = 8 \iff w_1 = 2, \quad w_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad w_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Pokazat ćemo da za $z \neq 0$ uvijek postoji n njegovih različitih n-tih korijena. Uobičajeno je da se korijen kompleksnog broja označava istim simbolom kao i aritmetički korijen realnog broja i to ponekad može izazvati zabunu. Tako, primjerice, ako je z realan broj, primjerice $z = 8$, tada je 2 jedini aritmetički treći korijen ovog broja, dok kompleksni korijen $\sqrt{8}$ ima tri vrijednosti: 2, $-1 + i\sqrt{3}$ i $-1 - i\sqrt{3}$.

Primjer 3.

Vrijedi:

$$(1 + i)^4 = (1 + 2i + i^2)^2 = (2i)^2 = -4,$$
$$(-1 + i)^4 = (1 - 2i + i^2)^2 = (-2i)^2 = -4,$$
$$(-1 - i)^4 = (1 + 2i + i^2)^2 = (2i)^2 = -4,$$
$$(1 - i)^4 = (1 - 2i + i^2)^2 = (-2i)^2 = -4.$$

Vidimo da su brojevi $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$ četvrti korijeni broja -4.



Odredimo sad n-ti korijen kompleksnog broja z, $z \neq 0$. Stavimo $w = \sqrt[n]{z}$, tj. $z = w^n$ i prikažimo te brojeve u trigonometrijskom obliku:

$$z = r\Big(\cos\varphi + i\ \sin\varphi\Big),$$
$$w = \rho\Big(\cos\psi + i\ \sin\psi\Big).$$

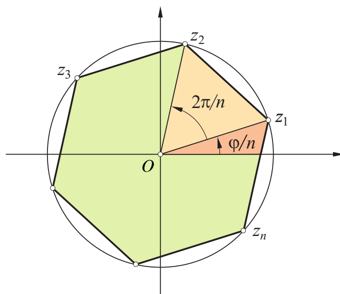
Tada iz

$$r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = \rho^n\left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right)$$

slijedi:

$$\rho^n = r \quad\Longrightarrow \rho = \sqrt[n]{r},$$
$$n\psi = \varphi + 2k\pi \Longrightarrow \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

U ovoj je formuli $\sqrt[n]{r}$ aritmetički n-ti korijen pozitivnog broja r, to je pozitivan realni broj.



Svi n-ti korijeni kompleksnog broja različitog od nule vrhovi su pravilnog n-terokuta sa središtem u ishodištu. Polumjer n-terokuta iznosi $\sqrt[n]{r}$, a argument prvog od njih je φ/n.

U izrazu za argument ψ, k uzima sve cjelobrojne vrijednosti. No to ne znači da ćemo dobiti beskonačno mnogo *različitih* vrijednosti za argument ψ, jer će se nakon nekog vremena te vrijednosti razlikovati za višekratnik od 2π pa će stoga definirati isti argument. Uvrštavanjem redom za $k = 0, 1, \dots, n-1$ dobivamo sljedeće *različite* vrijednosti argumenta ψ:

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n} \dots \quad \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Prva sljedeća vrijednost je $\dfrac{\varphi + 2n\pi}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi$ i ona daje isti argument kao i $\dfrac{\varphi}{n}$. Sve sljedeće vrijednosti mogu se također dobiti iz gornjih vrijednosti dodavanjem višekratnika broja 2π. Isto vrijedi i za negativne brojeve k.

Korijen kompleksnog broja

n-ti korijen kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ima točno n različitih vrijednosti:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \qquad (5)$$

Svi ti brojevi imaju isti modul $\sqrt[n]{r}$. Oni leže na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjerom $\sqrt[n]{r}$. Argumenti uzastopnih dvaju brojeva razlikuju se za $2\pi/n$. Zato tih n brojeva određuje pravilan n-terokut u kompleksnoj ravnini.

Primjer 4.

Odredimo sve vrijednosti korijena **1)** $\sqrt[3]{-1+i}$; **2)** $\sqrt[4]{16}$; i prikažimo ih u kompleksnoj ravnini.

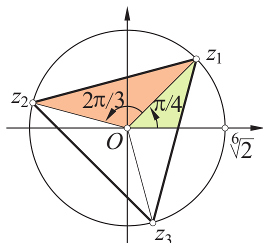
1) Napišimo broj $-1+i$ u trigonometrijskom obliku:

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Prema tome, vrijedi $|-1+i| = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ i po formuli (5) dobivamo sljedeće vrijednosti:

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4+2k\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)$$
$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right], \quad k=0,1,2.$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti broja k dobivamo sljedeće tri vrijednosti ovoga korijena:



treći korijeni broja $-1+i$

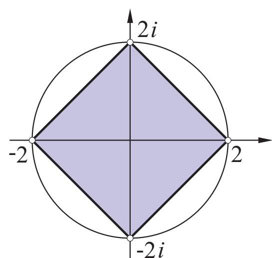
$$k=0: \quad z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$k=1: \quad z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$
$$k=2: \quad z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Ti su brojevi prikazani na slici.

2) Broj 16 u trigonometrijskom obliku ima prikaz
$$16 = 16(\cos 0 + i\sin 0),$$
pa je
$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{4} + i\sin\frac{0+2k\pi}{4}\right),$$
$$= 2\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right), \quad k=0,1,2,3.$$

Ovdje moramo razlikovati broj $\sqrt[4]{16}$ s lijeve strane jednakosti: to je četvrti korijen kompleksnog(!) broja 16 i on ima četiri vrijednosti. S desne strane jednakosti $\sqrt[4]{16}$ nalazi se četvrti korijen pozitivnog realnog broja 16, koji ima samo jednu (pozitivnu) vrijednost.

Uvrštavanjem vrijednosti za k, dobivamo:



Četvrti korijeni broja 16 leže u vrhovima kvadrata sa središtem u ishodištu, čiji je jedan vrh u točki $(2,0)$.

$$k=0: \quad z_1 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2,$$
$$k=1: \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$k=2: \quad z_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$
$$k=3: \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Vidimo da smo $\sqrt[4]{16}$ mogli pronaći i bez upotrebe de Moivreove formule, znajući da je jedna vrijednost broj 2, a sljedeće tri predstavljaju preostale vrhove kvadrata sa središtem u ishodištu (slika).

Zadatci 1.7.

1. Dani su brojevi $z_1 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7}{5}\pi + i\sin\frac{7}{5}\pi\right)$, $z_2 = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$. Izračunaj z_1^3 i z_2^4.

2. Izračunaj:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$;

2) $\left[2(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)\right]^{10}$;

3) $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)\right]^5$;

4) $\left[\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right]^{42}$.

3. Izračunaj sljedeće potencije:

1) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3$;

2) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4$;

3) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$;

4) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$;

5) $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-2}$;

6) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^{-4}$.

4. Koliko je $z_1^{12} : z_2^5$ ako je

$$z_1 = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{16} - i2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{16}?$$

5. Izračunaj:

1) $(i-\sqrt{3})^{13}$; **2)** $(1-i)^{11}$;

3) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{50}$.

6. Ako je $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, koliko je $(1+z)^n$?

7. Dokaži:

1) $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

2) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

8. Ako je $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, izračunaj $z_1^n + z_2^n$, $n \in \mathbf{Z}$.

9. Izračunaj:

1) $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right]^{-6}$;

2) $\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{15} - \frac{i}{2}\sin\frac{4\pi}{15}\right)^{-5}$.

10. Zapiši u trigonometrijskom obliku broj:

1) $\left(\frac{2}{i\sqrt{3}-1}\right)^6$; **2)** $\frac{i-1}{\sqrt{3}+i}$;

3) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$; **4)** $\frac{1}{1-i\sqrt{3}} - \frac{1}{i\sqrt{3}+1}$.

11. Odredi argument i modul kompleksnog broja:

1) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$;

2) $z = \dfrac{i-1}{\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}}$;

3) $z = (\sqrt{2}-i)^{10} \cdot (1-i\sqrt{2})^{20}$;

4) $z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{17\pi}{6}\right)}$.

12. Koristeći de Moivreovu formulu dokaži sljedeće identitete:

1) $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$;

2) $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$;

3) $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$;

4) $\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha$.

13. Ako je $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, dokaži da je $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.



14. Izračunaj naznačene korijene:

1) $\sqrt{-i}$; **2)** $\sqrt{3+4i}$; **3)** $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

15. Nađi sve vrijednosti korijena i predoči ih u Gaussovoj ravnini:

1) $\sqrt[3]{-1}$; **2)** $\sqrt[3]{8}$; **3)** $\sqrt[3]{-27}$;
4) $\sqrt[4]{i}$; **5)** $\sqrt[6]{1}$. **6)** $\sqrt[3]{i}$;
7) $\sqrt[3]{-2+2i}$; **8)** $\sqrt[4]{-1}$; **9)** $\sqrt[6]{-1}$;
10) $\sqrt[8]{-1}$.

16. Odredi sve vrijednosti sljedećih korijena:

1) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$; **2)** $\sqrt[3]{2+2i}$;
3) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

17. Izračunaj:

1) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; **2)** $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$;
3) $\sqrt[12]{\frac{1}{1-i\sqrt{3}}}$.



18. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da je:

1) $z^4 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$;
2) $z^3 = -\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$.

19. Prikaži u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve $z = 1-i\sqrt{3}$ i $w = -3\cos\frac{\pi}{4} - 3i\sin\frac{3\pi}{4}$. Izračunaj z^5 i $\sqrt[4]{w}$.

20. Prikaži u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve $z = -\sqrt{3} - i$ i $w = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}$. Izračunaj $\sqrt[3]{z}$ i w^5.

21. Ako je $z = -4\cos\frac{5\pi}{6} + 4\,i\,\sin\frac{7\pi}{6}$, izračunaj $\bar{z}^3$ i $\sqrt[4]{z}$.

22. Ako je $z = -\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\pi}{3}$, izračunaj z^4 i $\sqrt[5]{\bar{z}}$.

23. Odredi ona rješenja jednadžbe $z^7 + \bar{z} = 0$, $z \in \mathbf{C}$ za koja je $\operatorname{Im}(z) > 0$.

24. Pokaži da vrijedi

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n = 3k, \\ -1, & \text{ako je } n = 3k \pm 1. \end{cases}$$

25. Riješi jednadžbe:

1) $z^6 + 64 = 0$;
2) $z^4 + 1 = 0$;
3) $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$;
4) $z^3 + i = 0$;
5) $z^5 - i = 0$;
6) $z^6 - 1 = 0$.

1.8. Polinomi

Među svim elementarnim funkcijama najjednostavniji su polinomi. Njihova se vrijednost može izračunati s pomoću konačno mnogo elementarnih operacija zbrajanja i množenja. No, zbog toga su polinomi iznimno važni, jer ponašanje mnogih drugih funkcija istražujemo dovodeći ih u vezu s polinomima.

U ovom ćemo poglavlju upoznati neka dodatna svojstva polinoma.

Bilo koji polinom stupnja n zapisujemo ovako:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Koeficijenti polinoma $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mogu biti realni ili kompleksni brojevi. Koeficijent a_n se naziva **vodeći koeficijent**. On je različit od nule.

Neka je z_1 realan ili kompleksan broj. Dijeljenjem polinoma $P(z)$ s polinomom $z-z_1$ dobiva se kvocijent $Q(z)$ — polinom stupnja $n-1$. Kao rezultat dijeljenja može se pojaviti i ostatak, realni ili kompleksni broj r_1. Ta se operacija može napisati formulom:

$$P(z) = Q(z)(z - z_1) + r_1. \tag{1}$$

Stavimo $z = z_1$ u ovu formulu. Dobit ćemo: $P(z_1) = r_1$. Zaključujemo da je broj r_1 upravo vrijednost polinoma $P(z)$ u točki $z = z_1$. Dakle, za svaki broj z_1 vrijedi

$$P(z) = Q(z)(z - z_1) + P(z_1).$$

Posebice, ako je z_1 nul-točka polinoma $P(z)$, onda je $P(z_1) = 0$ pa dobivamo

$$P(z) = Q(z)(z - z_1).$$

Kriterij djeljivosti polinoma

Ako je z_1 nul-točka polinoma $P(z)$, on je onda djeljiv polinomom $z - z_1$.

Primjer 1. Za polinom $P(z) = z^4 + 2z^3 - z - 2$ vrijedi $P(1) = 0$. Dakle $z_1 = 1$ je njegova nul-točka, pa je polinom djeljiv s $z - 1$. Provedimo dijeljenje:

$$
\begin{array}{l}
z^4 + 2z^3 - z - 2 \ : \ z - 1 = z^3 + 3z^2 + 3z + 2 \\
\underline{z^4 - z^3} \\
\quad 3z^3 - z - 2 \\
\quad \underline{3z^3 - 3z^2} \\
\qquad 3z^2 - z - 2 \\
\qquad \underline{3z^2 - 3z} \\
\qquad\quad 2z - 2 \\
\qquad\quad \underline{2z - 2} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Time smo dobili:

$$P(z) = (z^3 + 3z^2 + 3z + 2)(z - 1).$$

Ima li svaki polinom nul-točku? Odgovor je *negativan* ako takve nul-točke tražimo u realnim brojevima: polinom $z^2 + 4$ nema realnih nul-točki. Razlog uvođenja kompleksnih brojeva leži upravo u tome što u skupu $\mathbf{C}$ *svaki* polinom ima nul-točku. Tako je, primjerice, $z_1 = 2i$ nul-točka ovog polinoma.

Osnovni stavak algebre

Svaki polinom stupnja $n \geqslant 1$ (s realnim ili kompleksnim koeficijentima) ima nul-točku u skupu kompleksnih brojeva.

Ova je tvrdnja vrlo duboka, i svaki njezin dokaz[1] potpuno je netrivijalan. Po tehnici, oni izlaze izvan okvira elementarne matematike i mi ih ovdje ne možemo navoditi. Sam se izrijek zbog svoje važnosti naziva **osnovni stavak algebre**.



Neka je $P(z)$ bilo koji polinom stupnja $n \geqslant 1$:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0. \tag{2}$$

Po osnovnom stavku algebre, on ima nul-točku z_1. Pokazali smo da je tada $P(z)$ djeljiv sa $(z - z_1)$. To znači da postoji polinom $P_{n-1}(z)$ stupnja $n-1$ takav da vrijedi

$$P(z) = (z - z_1) P_{n-1}(z). \tag{3}$$

Ako je $n \geqslant 2$, onda je $P_{n-1}(z)$ stupnja barem 1 i možemo ponovno primijeniti osnovni stavak algebre na taj polinom: postoji kompleksni broj z_2 koji je

[1] Prvi dokaz je izveo Gauss.

nul-točka polinoma P_{n-1}. Jasno je da je taj kompleksni broj ujedno i nul-točka polinoma $P(z)$. Kako je $P_{n-1}(z)$ djeljiv sa $(z-z_2)$, vrijedi relacija

$$P(z)=(z-z_1)(z-z_2)P_{n-2}(z) \tag{4}$$

za neki polinom $P_{n-2}(z)$ stupnja $n-2$.

Nastavljajući ovaj postupak na koncu ćemo dobiti formulu

$$P(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)P_0, \tag{5}$$

gdje je P_0 polinom stupnja 0, dakle, broj. Usporedbom vodećeg koeficijenta (uz potenciju z^n) polinoma $P(z)$ u formulama (2) i (5), vidimo da je ta konstanta P_0 upravo koeficijent a_n. Time smo pokazali sljedeće.

Faktorizacija polinoma

Svaki se polinom stupnja $n \geqslant 1$ *može faktorizirati* na sljedeći način:

$$P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n), \tag{6}$$

gdje su $z_1,\ldots,z_n$ njegove nul-točke.

Dakako da se neki među brojevima $z_1,\ldots,z_n$ mogu podudarati. Za nul-točku koja se u ovom prikazu pojavljuje više puta kažemo da je višestruka ili da ima kratnost onoliku koliko se puta pojavljuje u tom prikazu.

Broj nul-točaka polinoma

Polinom stupnja n ima n nul-točaka, brojeći njihovu kratnost.

Vièteove formule

Izjednačimo oba dobivena prikaza:

$$a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0. \tag{7}$$

Pomnožimo faktore s lijeve strane i izjednačimo koeficijente uz istovjetne potencije. Dobit ćemo sljedeće jednakosti koje moraju zadovoljavati nul-točke polinoma:

$$z_1+z_2+\ldots+z_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$z_1z_2+\ldots+z_1z_n+z_2z_3+\ldots+z_2z_n+\ldots+z_{n-1}z_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$z_1z_2\cdots z_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Ove se formule nazivaju **Vièteove**[1] **formule**. U drugom retku nalazi se zbroj svih umnožaka dvaju brojeva z_i, z_j $(i \neq j)$, u trećem retku zbroj svih umnožaka od po triju takvih brojeva itd.

[1] François Viète (1540. – 1603.), francuski matematičar.

Primjer 2. Napišimo Vièteove formule za polinome stupnja $n = 2, 3, 4$. Dobit ćemo sljedeće formule, koje ispisujemo označavajući koeficijente na način uobičajen za polinome malog stupnja.

- Za polinom drugog stupnja
$$P(z) = az^2 + bz + c,$$
formule glase:
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -\frac{b}{a}, \\ z_1 z_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

- Za polinom trećeg stupnja
$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d,$$
formule glase:
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= -\frac{b}{a}, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 &= \frac{c}{a}, \\ z_1 z_2 z_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

- Za polinom četvrtog stupnja
$$P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e,$$
formule glase:
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= -\frac{b}{a}, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 &= \frac{c}{a}, \\ z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4 &= -\frac{d}{a}, \\ z_1 z_2 z_3 z_4 &= \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

Nul-točke polinoma s realnim koeficijentima

Sve što smo dosad rekli odnosi se na polinome s po volji odabranim koeficijentima, kako realnim (ili cjelobrojnim!), tako i kompleksnim. Međutim, ako su koeficijenti polinoma realni, o njima se može reći nešto više. Pokažimo najprije jedan pomoćni rezultat.

Primjer 3.

Pokažimo da za svaki polinom P s realnim koeficijentima vrijedi $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

Vrijedi $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; odavde je indukcijom $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$. Kako su koeficijenti a_k realni, za svaki k vrijedi $\overline{a_k} = a_k$. Zato

$$P(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 = \overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)}.$$

Ova formula ima sljedeću važnu posljedicu:

Kompleksne nul-točke dolaze u parovima

Ako je P polinom s realnim koeficijentima, i $z \in \mathbf{C}$ njegova nul-točka, onda je i $\overline{z}$ nul-točka istog polinoma.

Zaista, ako je z nul-točka, onda vrijedi $P(z) = 0$, pa stoga i $\overline{P(z)} = 0$. Odavde slijedi $P(\overline{z}) = 0$ te je i $\overline{z}$ nul-točka istog polinoma.

Kažemo da nul-točke polinoma s realnim koeficijentima *dolaze u kompleksno-konjugiranim parovima*.

Primjer 4.

Odredimo rješenja jednadžbe

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0,$$

znajući da je jedno njezino rješenje broj i.

Broj i zaista jest rješenje:

$$i^4 + 2i^3 + 3i^2 + 2i + 2 = 1 - 2i - 3 + 2i + 2 = 0.$$

Zato je, budući da polinom ima realne koeficijente, broj $-i$ također njezino rješenje. Stoga je polinom P djeljiv s $(x-i)(x+i) = x^2 + 1$. Provedimo naznačeno dijeljenje:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2) : (x^2 + 1) = x^2 + 2x + 2 \\
\underline{x^4 \qquad\quad + x^2} \\
\qquad 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \\
\qquad \underline{2x^3 \qquad\quad + 2x} \\
\qquad\qquad 2x^2 \qquad + 2 \\
\qquad\qquad \underline{2x^2 \qquad + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Druge dvije nul-točke dobivamo rješavajući jednadžbu

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

odakle je $x_3 = -1 + i$, $x_4 = -1 - i$.

Zadatci 1.8.

1. Provjeri je li zadani kompleksni broj z rješenje jednadžbe:

1) $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$, $z = 1 + i$;

2) $z^4 - 5z^3 + 4z^2 + 2z - 8 = 0$, $z = 1 - i$.

2. Za koje će vrijednosti parametra a nul-točke polinoma $P(x) = (a+5)x^2 - 2ax + (a-1)$ biti kompleksne?

3. Odredi koeficijent b i preostale nul-točke polinoma $P(x) = x^3 - 3x^2 + bx - 6$ ako je 3 jedna njegova nul-točka.

4. Odredi polinom s cjelobrojnim koeficijentima čija je nul-točka $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

5. Broj $z = 1 + i$ jedno je rješenje jednadžbe $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$. Odredi sva ostala njezina rješenja.

6. Odredi nul-točke polinoma $f(x) = 3x^6 - 6x^5 + 8x^4 + 14x^3 - 33x^2 - 4x + 10$, znajući da je $f(1-2i) = 0$.

7. Odredi nul-točke polinoma $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ znajući da je $f(i) = 0$.

8. Uvjeri se da je broj i nul-točka polinoma i u brojniku i u nazivniku razlomka

$$\frac{z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3}{z^4 - 5z^3 + 5z^2 - 5z + 4}.$$

Potom skrati razlomak.

9. Riješi jednadžbe:

1) $z^2 - 4iz - 7 - 4i = 0$;

2) $z^2 - z + 1 + i = 0$.

10. U skupu $\mathbf{C}$ riješi sljedeće jednadžbe. Rješenja napiši u trigonometrijskom obliku.

1) $z^2 - 4(6+i)z + 3(8i - 1) = 0$;

2) $z^2 + (10i - 7)z - 11 - 41i = 0$;

3) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

11. U skupu $\mathbf{C}$ riješi sljedeće jednadžbe:

1) $z^4 + z^2 + 1 = 0$;

2) $(z+1)^2 + i(z+2)^2 = 0$;

3) $(z-i)^3 = i(z+i)^3$;

4) $(z+1)^2 + i(z^2+z)^2 = 0$;

5) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

12. Riješi jednadžbe:

1) $(3-i)z^3 = -4 + 8i$;

2) $z^4 + z^2 + 1 = 0$;

3) $z^6 + 2iz^3 - 1 = 0$;

4) $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$;

5) $(1+i)z^4 - (1-i)z = 0$.

13. Odredi rješenja jednadžbe

1) $z^6 - 2z^3 + 4 = 0$, z iz prvog kvadranta;

2) $z^6 + 2z^3 + 4 = 0$, z iz četvrtog kvadranta;

3) $\dfrac{(z+16)^3}{2\sqrt{3} - 2i} = \dfrac{(-\sqrt{3} - i)^{11}}{1 - \sqrt{3}i}$;

4) $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$;

5) $\dfrac{z^4 + 16}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)} = (-1+i)^7$;

6) $\left(\dfrac{z^3}{1-i} - 2\right)^3 + 8 = 0$, z iz trećeg kvadranta.

14. Odredi (kompleksne) koeficijente a, b, c polinoma $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ tako da bude $f(1) = 8 + 16i$, $f(-1) = 16 - 8i$, $f(i) = 0$. Potom riješi jednadžbu $f(z) = 0$. Izračunaj realni i imaginarni dio svakog rješenja.

15. Pokaži da se polinom $P(z) = 8z^4 - 8z^3 + 27z - 27$ može napisati u obliku $P(z) = (z-1)Q(z)$, gdje je $Q(z)$ polinom trećeg stupnja koji treba odrediti. Riješi u skupu $\mathbf{C}$ jednadžbu $P(z) = 0$.

2 Kombinatorika



Koliko različitih telefonskih brojeva postoji ako su brojevi šesteroznamenkasti, a prva znamenka nije jednaka nuli? Koliko se može napisati peteroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama? Na koliko se načina deset predmeta može podijeliti na deset osoba? Na koliko se načina može izvući sedam brojeva od 39 u igri LOTO?

Kombinatorika je grana matematike koja se bavi prebrojavanjem konačnih skupova. Ma koliko je brojenje svakodnevan posao, prebrojavanje elemenata nekog skupa može biti iznimno teško. U ovom ćemo poglavlju usvojiti neke elementarne principe prebrojavanja.

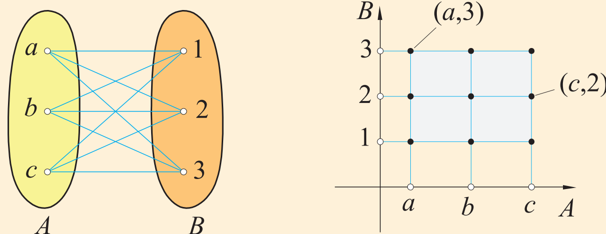
2.1. Princip uzastopnog prebrojavanja

Broj elemenata nekog skupa dobivamo prebrojavajući njegove elemente. Prebrojavanje često možemo zamijeniti efikasnijim postupcima.

Primjer 1. Ekipni susreti u stolnom tenisu igraju se tako da svaki igrač jedne ekipe igra protiv svakog igrača druge ekipe. Ako se svaka ekipa sastoji od triju igrača, koliki je ukupni broj igara?

Svaki igrač prve ekipe odigrat će ukupno tri meča protiv svih igrača druge ekipe. Isti broj igara odigrat će i preostala dva igrača. Dakle, ukupan broj igara je $3 \cdot 3 = 9$.

Ovdje je riječ o malim skupovima i mogli smo ispisati tih 9 igara, naznačujući imena igrača iz svake ekipe koji igraju pojedini susret. Međutim, potpuno isto zaključivanje vrijedi i za skupove s velikim brojem elemenata, gdje bi takvo ispisivanje bilo nepraktično.



Na slici je shematski prikaz susreta između dviju ekipa. Svaki igrač prve ekipe igra protiv svakog igrača druge. Jednu igru možemo prikazati uređenim parom, poput $(c, 2)$ *ili* $(a, 3)$.

Primjer 2. Koliko različitih telefonskih brojeva postoji ako su brojevi šesteroznamenkasti, a prva znamenka nije jednaka nuli?

Prvu znamenku možemo birati na devet načina, iz skupa $S_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Drugu na deset načina, iz skupa $S_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Treću, i ostale, možemo birati također na deset načina. Prema tome, traženi je broj jednak umnošku

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900\,000.$$

Princip uzastopnog prebrojavanja

Primjer 3. Koliko postoji dvoznamenkastih brojeva s različitim znamenkama?

Prvu znamenku možemo birati po volji, devet je mogućih izbora unutar skupa $S_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Drugu znamenku biramo iz skupa $S_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, ali pritom moramo paziti da ne odaberemo već prije odabranu znamenku. Dakle, nju biramo između devet *preostalih* znamenki skupa S_2, koje su različite od s_1. Izbor druge znamenke ovisi o izboru prve znamenke, ali *njihov broj ne ovisi*.

Zato će izbor biti uređeni par (s_1, s_2), pri čemu je $s_2 \neq s_1$. Ukupan broj svih mogućnosti je $9 \cdot 9$.

Na identičan način možemo odgovoriti na drugo pitanje u uvodu poglavlja.

Primjer 4. Koliko se može napisati peteroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama?

Peteroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama ima

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216,$$

jer prvu znamenku biramo iz skupa S_1 (devet mogućnosti), drugu iz skupa svih znamenki različitih od prve (devet mogućnosti), treću iz skupa svih znamenki različitih od prve dvije (osam mogućnosti) itd.

Način razmišljanja u svim dosadašnjim primjerima možemo formulirati na sljedeći način:

Princip uzastopnog prebrojavanja

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Princip obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 način, drugi dio posla na n_2 načina, ..., posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ načina[1].

Ako poredak elemenata nije važan, pri primjeni principa o uzastopnom prebrojavanju moramo biti vrlo oprezni. Objasnit ćemo to kroz sljedeća dva primjera.

Primjer 5.

Koliko dijagonala ima pravilan n-terokut?

Dijagonala je određena dvama nesusjednim vrhovima n-terokuta. Prvi vrh možemo odabrati na n načina. Za drugi vrh nakon toga na raspolaganju imamo $n-3$ nesusjedna vrha. Ukupan broj (uređenih) parova vrhova je $n(n-3)$. Međutim, broj dijagonala je dva puta manji, jer svaka dijagonala povezuje dva vrha: dva uređena para (A,B) i (B,A) vrhova određuju istu dijagonalu. Dakle, broj dijagonala je $N = \frac{1}{2}n(n-3)$. (Ovaj je broj uvijek cjelobrojan, jer su brojevi n i $n-3$ različite parnosti.)

Primjer 6.

Snop karata sastoji se od 52 karte, podijeljene u četiri boje (po 13 karata svaka). Na koliko različitih načina možemo odabrati dvije karte iste boje?

Boju možemo odabrati na četiri načina. Prvu kartu u toj boji na 13 načina. Nakon što smo odabrali prvu kartu, preostaje 12 mogućnosti za izbor druge karte iste boje. Ponovno je svaki par brojen dva puta. Ukupan broj izbora dviju karata je $4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 312$.

Primjer 7.

Koliko se peteroznamenkastih brojeva može napisati znamenkama 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ako se 0 ne smije naći niti na prvom, niti na posljednjem mjestu, a sve znamenke moraju biti različite?

Brojeva kod kojih nula nije na prvom mjestu ima $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, jer prva znamenka mora biti različita od nule, druga bilo koja od preostalih itd. Neki od ovih brojeva imat će nulu na posljednjem mjestu. Zato ćemo sada prebrojiti koliko je takvih brojeva. Kod njih prvu znamenku možemo odabrati na 6 načina, drugu na 5 načina, treću na četiri načina, a četvrtu na 4 načina. Peta znamenka je nula. Ukupno ima $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ovakvih brojeva. Prema tome, svega je $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1800$ brojeva koji zadovoljavaju oba uvjeta.

[1] Murphyjev zakon: Postoji li ijedan način da posao krene naopako, sigurno će krenuti naopako — iskustvena je činjenica koja se ne može matematički dokazati.

Primjer 8. Na koliko različitih načina možemo iz snopa od 52 karte odabrati dvije karte različitih boja?

▶ Dvije boje možemo odabrati na šest načina. Kartu u toj svakoj boji možemo odabrati na 13 načina. Ukupan broj izbora dviju karata je $6 \cdot 13 \cdot 13 = 1014$.

Možemo razmišljati i ovako: Prvu kartu možemo odabrati na 52 načina, a drugu (među preostalim bojama) na 39. Pritom je svaki mogući par brojen dvaput, pa je ukupan broj jednak $52 \cdot 39 \cdot \dfrac{1}{2}$.

Primjer 9. Koliko se različitih registracijskih pločica može izraditi ako svaka sadrži tri slova i zatim dvije znamenke?

▶ Različitih slova ima 22 (ne uzimaju se slova Č, Ć, DŽ, Đ, LJ, NJ, Š, Ž, Q, X, Y, W). Registracijska pločica određena je uređenom petorkom u kojoj se prve tri komponente biraju iz skupa od 22 slova, a preostale dvije iz skupa od 10 znamenaka. Zato je ukupan broj

$$22 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,064\,800.$$

Primjer 10. Satničar treba staviti u satnicu jedan sat matematike svaki radni dan u tjednu. Ako razred ponedjeljkom i četvrtkom ima 7 sati, utorkom i srijedom 6, a petkom 5, na koliko se načina to može učiniti?

▶ Mogućih rasporeda ima $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 = 8820$. Sastavljanje cjelokupne satnice složen je kombinatorni problem. Školski su satničari uglavnom profesori matematike.

Zadatak 1. Školska knjižnica sadrži 28 knjiga iz matematike, 16 iz fizike, 10 iz kemije i 15 iz biologije. Na koliko načina učenik može uzeti po jednu knjigu iz tih četiriju predmeta?

Još jedan, ugodniji zadatak:

Zadatak 2. Videoteka posjeduje 56 akcijskih filmova, 24 komedije, 46 drama i 16 filmova u kategoriji ‘hitova’. Na koliko se načina može odabrati po jedan film iz svake skupine? Na koliko načina nakon toga po jedan film može odabrati sljedeći posjetilac?

Primjer 11. Ako iz videoteke u prethodnom zadatku biramo samo dva filma, po jedan iz različitih skupina, na koliko načina to možemo učiniti?

Ovaj je problem složeniji. Izbor filmova moramo činiti u dva koraka. Najprije se moramo odlučiti za skupine filmova, a zatim odabrati po jedan film iz svake skupine. Imamo sljedećih šest mogućnosti:

akcijski i komedije:	$N_1 = 56 \cdot 24 = 1344$,
akcijski i drame:	$N_2 = 56 \cdot 46 = 2576$,
akcijski i hitovi:	$N_3 = 56 \cdot 16 = 896$,
komedije i drame:	$N_4 = 24 \cdot 46 = 1104$,
komedije i hitovi:	$N_5 = 24 \cdot 16 = 384$,
drame i hitovi:	$N_6 = 46 \cdot 16 = 736$.

Ukupan broj različitih izbora je $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = 7040$.

Zadatak 3. Na koliko načina se iz snopa od 52 karte mogu odabrati 2 karte iste boje?

Zadatak 4. Koliko se peteroslovnih riječi, smislenih ili ne, iz skupa od 20 suglasnika i 5 samoglasnika može napisati, ako suglasnici i samoglasnici moraju alternirati, a slova se ne smiju ponavljati?

Varijacije s ponavljanjima

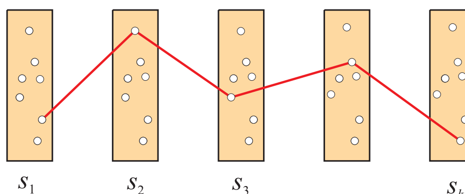
Na koliko se različitih načina može izabrati k elemenata skupa $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pazeći na njihov poredak, s tim da se elementi mogu ponavljati?

Svaki se element bira iz istog skupa S, pa se svaki od njih može odabrati na n načina. Zato je broj različitih izbora jednak n^k.

Varijacije s ponavljanjem

Varijacija s ponavljanjem k-tog razreda u n-članom skupu S je *svaka uređena k-torka* elemenata iz S. Broj varijacija s ponavljanjem označavamo s $\overline{V}_n^k$.

$$\overline{V}_n^k = n^k.$$



Na slici su prikazane varijacije s ponavljanjem. Izbor uređene k-torke $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ određuje jedan put, koji povezuje izabrane elemente pojedinih skupova.

Tako su primjerice varijacije s ponavljanjima drugog razreda u skupu $S = \{1, 2, 3, 4\}$:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Njihov je broj $\overline{V}_4^2 = 4^2 = 16$.

Ovdje i u sličnim primjerima, radi jednostavnosti pisat ćemo 11 umjesto uređenog para $(1, 1)$, a slično i za ostale parove. Također, umjesto uređene k-torke govorimo često o **nizu** elemenata, i pišemo $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sa ili bez zareza između elemenata.

Primjer 12. Test na ispitu znanja ima 40 pitanja. Pristupnik u svakom pitanju može zaokružiti jedan od ponuđenih pet odgovora ili ostaviti pitanje neodgovoreno. Na koliko se različitih načina može odgovoriti na zadani test?

▶ Na svako se pitanje može odgovoriti na šest različitih načina. Ukupan broj različitih odgovora u cijelom testu je $6^{40} \approx 1.34 \cdot 10^{31}$. Riječ je o varijacijama s ponavljanjima, razreda 40 u skupu od 6 elemenata.

Zadatak 5. Iz snopa od 52 karte izvlači se jedna karta i zapiše rezultat. Pokus se ponavlja tri puta. (Nakon izvlačenja karta se vraća u snop.) Koliko različitih ishoda ima ovaj pokus?

Primjer 13. **Broj podskupova zadanog skupa.** Koliki je broj podskupova skupa S koji ima n elemenata (uključujući prazan skup i cijeli skup)?

▶ Svakom elementu skupa S možemo pridružiti broj 0 ili 1, sa značenjem

0: taj se element ne uzima u podskup,
1: taj se element uzima u podskup.

Tako dobivamo niz duljine n koji se sastoji od nula i jedinica, a koji opisuje način izbora podskupa.

Primjerice, ako je $S = \{a, b, c, d, e\}$, tad niz $1, 0, 0, 1, 1$ određuje podskup $\{a, d, e\}$, a niz $0, 0, 1, 0, 0$ određuje podskup $\{c\}$. Niz $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ odgovara praznom podskupu, a niz $\{1, 1, 1, 1, 1\}$ cijelom skupu.

Time smo pokazali da je broj podskupova jednak broju nizova duljine n koji se sastoje od nula i jedinica. Prvu znamenku u tom nizu možemo izabrati na dva načina, drugu i sve ostale također na dva načina. Zato je ukupan broj različitih nizova, odnosno broj svih podskupova, jednak 2^n.

Partitivni skup

Skup svih podskupova skupa S označavamo s $\mathcal{R}(S)$ i nazivamo **partitivnim skupom** skupa S. Ako je $c(S) = n$, onda je $c(\mathcal{R}(S)) = 2^n$.

Zadatak 6. Na koliko različitih načina dijete može odabrati jednu ili više igrački, između 10 igrački koje posjeduje?

Varijacije bez ponavljanja

Na koliko načina možemo poredati k različitih elemenata iz skupa od n elemenata?

Prvi element možemo odabrati na n načina. Nakon toga, drugi element možemo odabrati na $n-1$ načina, jer mora biti različit od prvog. Treći možemo odabrati na $n-2$ načina. Posljednji, k-ti na $n-(k-1) = n-k+1$ načina. Zato je ukupan broj načina jednak $n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Varijacije bez ponavljanja

Uređena k-torka različitih elemenata istog skupa $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ naziva se **varijacijom** k-tog razreda u skupu od n elemenata. Pritom mora biti $k \leqslant n$. Broj varijacija označavamo s V_n^k. Vrijedi

$$V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

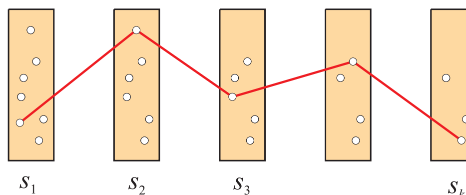
Primjer 14. Na koliko se različitih načina može podijeliti zlatna, srebrna i brončana medalja između osam natjecatelja?

▶ Riječ je o varijacijama trećeg razreda u skupu od osam elemenata. Zato je traženi broj $N = V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Svakako je korisnije zapamtiti način na koji smo došli do ovog broja, nego samu formulu. Moramo biti sigurni da razumijemo princip uzastopnog prebrojavanja:

- zlatnu medalju možemo podijeliti na 8 načina,
- srebrnu medalju možemo podijeliti na 7 načina (među preostalih 7 natjecatelja),
- brončanu medalju možemo podijeliti na 6 načina (među preostalih 6 natjecatelja).

Zato je broj različitih načina za dodjelu svih triju nagrada jednak $8 \cdot 7 \cdot 6$.



Na slici su prikazane varijacije bez ponavljanja u skupu od n elemenata. Prvi element biramo po volji, drugi element tako da bude različit od prvog itd.

Zadatak 7. Abeceda u hrvatskome jeziku sastoji se od 30 slova od kojih je 5 samoglasnika i 25 suglasnika. Na koliko se različitih načina može ispisati riječ od pet slova ako:

1) sva slova u riječi moraju biti različita,
2) poredak slova je suglasnik-samoglasnik-suglasnik-samoglasnik-suglasnik,
3) isto što i 2), ali su sva slova u riječi različita.

Zadatak 8. Iz snopa od 52 karte izvlače se, jedna po jedna, tri karte (bez vraćanja u snop). Koliko različitih ishoda ima ovaj pokus?

Primjer 15. Na koliko se načina može načiniti raspored sati za ponedjeljak ako je ukupno 12 nastavnih predmeta, a ponedjeljkom je po rasporedu nastava iz 6 različitih predmeta u 6 sati?

Prvi način. Za prvi sat možemo odabrati bilo koji od 12 predmeta. Nakon toga, za drugi sat dolazi u obzir bilo koji od preostalih 11 predmeta itd. Ukupan broj različitih rasporeda je $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Drugi način. (neispravan!) Neki predmet možemo odabrati na 12 načina. Nakon toga ga možemo staviti u satnicu na 6 različitih načina. Drugi predmet možemo odabrati na 11 načina, a staviti ga u satnicu na 5 načina itd. Ukupan broj različitih rasporeda je

$$12 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1$$

Ovdje je učinjena pogreška višestrukog prebrojavanja iste kombinacije.

Tu je pogrešku lako uočiti kad su manji brojevi u pitanju. Recimo, za samo dva sata i samo dva predmeta A i B na raspolaganju, dvije su satnice: AB i BA. Računajući na prvi način dobivamo ispravno rješenje: $2 \cdot 1$. Razmišljajući na drugi način dobili bi: prvi predmet možemo odabrati na 2 načina, a u satnicu ga staviti na 2 načina, što daje neispravnih $2 \cdot 2$.

Zadatci 2.1.

1. Koliko se troznamenkastih brojeva s različitim znamenkama može sastaviti od znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5?

2. Koliko se troznamenkastih brojeva može napisati iz skupa znamenaka 1, 1, 2, 2, 3, 4?

3. Koliko se troznamenkastih brojeva može napisati is skupa znamenaka 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5?

4. Od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5 napisani su svi peteroznamenkasti brojevi s različitim znamenkama. Koliko je među njima parnih?

5. Od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 napisani su svi peteroznamenkasti brojevi s različitim znamenkama. Koliko je među njima parnih?

— ◆ —

6. Broj 210 ima četiri različita prosta faktora. Na koliko se načina on može prikazati kao umnožak dvaju prirodnih brojeva (većih od 1)?

7. Na koliko se načina broj 420 može prikazati kao umnožak dvaju prirodnih brojeva (većih od 1)?

8. Broj 7854 ima pet različitih prostih faktora. Na koliko se načina on može prikazati kao umnožak dvaju prirodnih brojeva (većih od 1)?

9. Brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ različiti su prosti brojevi. Na koliko se načina broj $N = p_1 p_2 \ldots p_n$ može prikazati kao umnožak dvaju prirodnih brojeva (većih od 1)?

10. Ivica voli kuglanje. Nakon što je u igri čišćenja bacio kuglu na cilj od 9 čunjeva, koliko se različitih slika tih čunjeva može pojaviti?

11. Marko želi pozvati na ručak jednog ili nekolicinu od svojih 8 prijatelja. Na koliko to načina može učiniti?

12. **1)** Na koliko se načina može odabrati jedna ili više osoba iz popisa od 6 osoba?
2) Na koliko se načina može poredati jedna ili više osoba iz skupa od 6 osoba?

13. U Hrvatskoj se izrađuju kovanice od 1, 2, 5, 10, 20, 50 lipa te 1, 2 i 5 kuna. Ako raspolažemo s po jednim primjerkom ovih kovanica, koliko se različitih svota može s pomoću njih načiniti?

— ◆ —

14. Koliko bi šahovskih partija odigrali učenici dvaju razreda od po 24 učenika u međusobnom susretu ako svaki učenik jednog razreda odigra jednu partiju sa svakim učenikom iz drugog razreda?

15. Na koliko se načina može odabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovskoj ploči? (Poredak odabira crnog i bijelog polja nije važan.)

16. Na koliko se načina može odabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovskoj ploči ako ne smiju biti u istom retku ili stupcu?

17. U razredu je 17 djevojčica i 15 dječaka. Na koliko se načina mogu odabrati dva dežurna učenika, dječak i djevojčica?

18. Koliki je ukupan broj igara u prvenstvu u kojem sudjeluje 18 ekipa ako svatko igra sa svakim i to dva puta tijekom prvenstva?

19. Jedan test ima 20 pitanja na koja se odgovara s "da" ili "ne". Koliko je mogućnosti popunjavanja ovakva testa?

20. Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima su sve tri znamenke neparni brojevi, a koliko kojima su parni (uzimamo 0 kao paran broj)?

21. Lokot na šifru sastoji se iz šest kolutova od po 10 znamenaka. Koliko je mogućnosti odabira šifre takva lokota?

22. Koliko ima različitih peteroznamenkastih brojeva u sustavu
1) s bazom 3; **2)** s bazom 5?

23. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji su
1) djeljivi s 5; **2)** djeljivi s 4?

24. U nekom je mjestu 2000 žitelja. Dokaži da barem trojica imaju iste inicijale.

— ◆ —

25. Na nekom natjecanju sudjeluje 10 natjecatelja. Po završetku se dijele tri medalje za tri prva osvojena mjesta. Na koliko se načina može obaviti takva podjela?

26. Trideset učenika treba smjestiti na 34 mjesta u razredu. Na koliko se načina to može provesti?

27. Koliko je peteroznamenkastih brojeva u zapisu kojih se nalazi barem jedna znamenka 5?

28. Na jednoj je stranici trokuta odabrano n točaka, na drugoj m i na trećoj k, pri čemu ni jedna od odabranih točaka nije vrh trokuta. Koliko postoji trokuta kojima su vrhovi u odabranim točkama i svaki na drugoj stranici trokuta?

29. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva djeljivih s 5 kod kojih u zapisu nema jednakih znamenaka?

30. Koliko šesteroznamenkastih brojeva postoji kojima je
1) prva znamenka paran broj?
2) druga i posljednja znamenka neparan broj?

31. Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva postoji koji

1) ne sadrže znamenku 1;
2) sadrže točno jednu znamenku 1;
3) sadrže barem jednu znamenku 1?

32. Na koliko se načina u razredu s 28 učenika mogu odabrati četiri učenika koji će napisati po jedan referat iz četiri različite teme?

33. Na koliko načina može 6 osoba sjesti na po jednu od 8 stolica?

34. Koliko troznamenkastih brojeva možemo sastaviti iz znamenaka 1, 2, 3, 4, 5,
1) ako se u zapisu brojeva svaka znamenka pojavljuje samo jednom;
2) ako se u zapisu broja ista znamenka može pojaviti i više puta?

35. Na koliko se načina mogu načiniti 4 mješovita para od 10 tenisača i 6 tenisačica?



36. Od znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5 zapisujemo peteroznamenkaste brojeve. Koliko ima takvih brojeva

1) kojima su sve znamenke različite;
2) kojima se znamenke mogu i ponavljati;
3) koji su parni;
4) koji su djeljivi s 5;
5) koji su simetrični tj. čitani slijeva ili zdesna isti su broj.

37. Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva, koji nisu djeljivi s 5, možemo zapisati znamenkama 1, 3, 5, 7, 9 a da u zapisu svakog pojedinog broja nema jednakih znamenaka?

38. Koliko različitih razlomaka u kojima je brojnik manji od nazivnika možemo sastaviti od brojeva 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 tako da su brojnik i nazivnik po jedan od danih brojeva?

39. Od dvaju osnovnih znakova, točke i crtice, slažu se složeni znakovi koji sadrže najviše do pet osnovnih znakova. Koliko se različitih znakova može složiti?

40. Koliko postoji sedmeroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka paran broj?

41. Koliko prostornih dijagonala ima kocka, koliko oktaedar, koliko dodekaedar, a koliko ikosaedar?

42. *Sportska prognoza* ispunjava se tako da se u svakom od 13 susreta ispuni jedan od znakova: 1 — pobjeda domaćina, 0 — neriješeni ishod, 2 — pobjeda gosta.
1) Koliko različitih ishoda Sportske prognoze se može napisati?
2) Igrač popunjava sistemski listić. Od 13 susreta, na 6 upisuje samo jedan znak, na 3 dva znaka, a u 4 susreta sva tri moguća znaka. Koliko kombinacija treba uplatiti?

2.2. Permutacije

Permutacija skupa $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ od n različitih elemenata uređena je n-torka svih njegovih članova.

Tako primjerice, sve permutacije skupa $S = \{1, 2, 3\}$ su:

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1),$$

Jedna permutacija skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ je $(1, 3, 5, 7, 9, 0, 2, 4, 6, 8)$. Koliko različitih permutacija ovog skupa postoji?

Broj različitih permutacija skupa s n elemenata označavamo s P_n.

Primjer 1. Skup S ima četiri različita elementa, $S = \{a, b, c, d\}$. Permutaciju dobivamo nekim poretkom izbora njegovih elemenata:

- prvi element možemo izabrati na četiri načina,
- drugi element možemo izabrati nakon toga na tri načina,
- treći element možemo izabrati nakon toga na dva načina,
- za izbor četvrtog elementa ostao je samo jedan način (jer je samo jedan element preostao).

Ukupan broj načina je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Ispišimo ih. Sve moguće permutacije napisane su u četiri stupca. Svaki stupac odgovara jednoj od četiri mogućnosti izbora prvog elementa. Radi jednostavnosti zapisivanja, uređenu četvorku (a, b, c, d) pišemo jednostavnije kao $abcd$.

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

Pri redanju permutacija, ispisujemo najprije prvi stupac (s prvim elementom a), zatim drugi stupac itd. Ovakav se način ispisivanja permutacija naziva **leksikografski poredak**.

Zadatak 1. Ispiši leksikografskim poretkom sve riječi iz skupa slova A, L, R, U. Koliko se smislenih riječi u hrvatskom jeziku dobiva tim permutiranjem?

Zadatak 2. Ispiši leksikografskim poretkom sve troznamenkaste brojeve s različitim znamenkama koji se mogu napisati s pomoću znamenaka iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Koliki je njihov broj?

Općenito, broj permutacija skupa od n elemenata dobivamo ovako:

- prvi element možemo izabrati na n načina,
- drugi element možemo izabrati nakon toga na $n-1$ načina,

  ⋮

- pretposljednji element možemo izabrati na dva načina (jer su samo dva elementa preostala),
- posljednji element biramo samo na jedan način, jer je jedini preostao.

Broj permutacija

Broj različitih permutacija skupa od n elemenata je

$$P_n = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1 = n! \qquad (1)$$

Primjećujemo da je permutacija zapravo varijacija n-tog razreda u skupu od n elemenata. Zato je $V_n^n = P_n$.

Primjer 2.

Koliko se različitih riječi (smislenih i besmislenih) može sastaviti od svih slova riječi POVIJEST ako

1) slova možemo postavljati po volji;

2) suglasnici dolaze na prvo, treće, peto, sedmo i osmo mjesto, baš kao i u početnoj riječi?

1) Svaki raspored slova određuje jednu permutaciju. Ukupan broj rasporeda je $N = P_8 = 8! = 40\,320$.

2) Svaki suglasnik može doći na bilo koje od pet mjesta. Broj mogućih rasporeda suglasnika je $N_1 = P_5 = 5! = 120$. Broj mogućih rasporeda samoglasnika je $N_2 = P_3 = 3! = 6$. Po principu uzastopnog prebrojavanja, ukupan broj mogućih rasporeda je $N = N_1 N_2 = 720$.

Odgovorimo na treće pitanje postavljeno u uvodu.

Primjer 3.

Na koliko se načina deset različitih predmeta može podijeliti na deset osoba?

Svaka podjela odgovara jednoj permutaciji skupa. Označimo skup s $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$. Izaberimo jednu permutaciju, recimo

$$(a_3, a_6, a_1, a_8, a_5, a_2, a_4, a_9, a_7, a_{10}).$$

Možemo je čitati na ovaj način: prva osoba dobiva treći predmet, druga šesti predmet, treća prvi predmet itd. (Moguća je i drukčija interpretacija: prvi predmet ide trećoj osobi, drugi predmet šestoj osobi, treći prvoj osobi itd.) Koju god interpretaciju odaberemo, vidimo da je broj mogućih podjela jednak broju permutacija skupa od deset elemenata. Dakle, $N = P_{10} = 10! = 3\,628\,800$.

Primjer 4.

Osam prijatelja okupilo se u restoranu 'K veselom Janku'. Oko ponoći, gazda Janko nudi pogodbu: ako svake subote navrate k njemu i sjednu za isti okrugli stol ali u drugom poretku, od trenutka kad budu morali ponoviti raspored, on će ubuduće častiti ovo veselo društvo. Još dugo u noć dizale su se zdravice velikodušnom Janku. Je li ta procjena točna?

Dva poretka, u kojem se ne mijenja međusobni položaj gostiju za okruglim stolom, smatramo jednakim. Tako primjerice, jednaki su poretci u kojima se svaki gost ustane i sjedne na stolicu koja je bila desno od njega. Zato možemo u svakom rasporedu postići da jedan od gostiju (recimo najstariji, Petar) sjedi za istom stolicom. Na preostalih sedam mjesta ostatak društva može posjedati na $7!$ načina, i to je ukupan broj različitih razmještaja. Kako je $7! = 5040$, toliko će večera ova vesela skupina pojesti o svom trošku. Po isteku 97 godina, na red će doći gazda Janko.

Primjer 5.

Na jednu predstavu dolazi pet bračnih parova. Na koliko različitih načina oni mogu sjesti na deset stolica u istom redu ako

1) mogu sjesti po svojoj volji;

2) bračni drugovi moraju sjediti jedan do drugog;

3) jedna do druge ne smiju sjediti dvije osobe istog spola?

1) Svaka permutacija određuje jedan raspored. Broj različitih rasporeda je $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$.

2) Rasporedimo najprije bračne parove. Pet je parova pa za njihov raspored imamo $P_5 = 5! = 120$ mogućnosti. Unutar svaka dva mjesta određena za jedan bračni par, dva su moguća rasporeda. Zato je ukupan broj svih mogućih rasporeda $120 \cdot 2^5 = 3840$.

3) Sve muškarce možemo rasporediti na $P_5 = 120$ načina, baš kao i sve žene. Ukupan broj rasporeda na kojima je prva osoba muškarac (gledano, recimo, s lijeve strane) je $120 \cdot 120$. Jednako toliko ima rasporeda u kojima je prva osoba žena. Ukupan broj svih rasporeda je $2 \cdot 120 \cdot 120 = 28\,800$.

Poredak permutacije

Permutacije je najprirodnije ispisivati leksikografskim poretkom. Pritom pretpostavljamo da su elementi skupa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ poredani: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Kažemo onda da permutacija $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dolazi prije permutacije $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ako za prvi element za koji se one razlikuju vrijedi $x_i < y_i$.

Najčešće elemente skupa S označavamo brojkama ili slovima gdje je poredak elemenata prirodno dan. Tako primjerice permutacija $1, 3, 2, 4, 5$ dolazi prije permutacije $1, 3, 4, 2, 5$, a poslije permutacije $1, 2, 5, 4, 3$.

Promotrimo skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ukupan broj permutacija ovog skupa je $5! = 120$. Među njima je $4! = 24$ permutacija kojima je 1 na prvom mjestu, jednako toliko onih kojima je 2 na prvom mjestu itd. Zamislimo sve permutacije ovog skupa ispisane leksikografskim poretkom.

Primjer 6. Koja je permutacija skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pedeseta po redu u leksikografskom poretku?

Prve 24 permutacije imaju 1 na prvom mjestu, sljedeće 24 znamenku 2 na prvom mjestu. To je ukupno 48 permutacija. Znači, pedeseta permutacija ima 3 na prvom mjestu. 49. po redu glasi $3, 1, 2, 4, 5$, a pedeseta $3, 1, 2, 5, 4$.

Zadatak 3. Koja je permutacija skupa $\{\mathrm{E}, \mathrm{K}, \mathrm{O}, \check{\mathrm{S}}, \mathrm{T}\}$ osamdeseta po redu u leksikografskom poretku?

Sličnim principom rješavamo i obratni problem. Riješite najprije zadatak:

Zadatak 4. Ispiši leksikografskim poretkom sve permutacije skupa $\{\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{L}, \mathrm{O}\}$ i utvrdi koje su po redu riječi KOLA i LAKO.

Primjer 7. Koja je po redu u leksikografskom poretku skupa $\{\mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{K}, \mathrm{O}, \mathrm{P}, \mathrm{R}\}$ riječ POREDAK?

Ukupan broj slova je sedam, te je ukupan broj svih permutacija $7! = 5040$. Među njima ima $6!$ permutacija kojima je zadano prvo slovo. Kako je slovo P šesto slovo po redu, prije zadane permutacije ima $5 \cdot 6!$ permutacija s početnim slovima A, E, D, K, O.

Sad gledamo drugo slovo. Slovo O je peto slovo među preostalim slovima, zato prije njega postoji $4 \cdot 5!$ permutacija.

Isto razmišljanje nastavljamo s ostalim slovima. Rezultat pišemo u obliku tablice

Slovo	Preostala slova	Broj slova ispred njega	Broj preo-stalih slova	Broj permutacija ispred zadane
P	ADEKOR	5	6	$5 \cdot 6! = 3600$
O	ADEKR	4	5	$4 \cdot 5! = 480$
R	ADEK	4	4	$4 \cdot 4! = 96$
E	ADK	2	3	$2 \cdot 3! = 12$
D	AK	1	2	$1 \cdot 2! = 2$
A	K	0	1	$0 \cdot 1! = 0$
K		0	0	$0 \cdot 0! = 0$
				4190

Zadana je permutacija 4191. po redu.

Permutacije s ponavljanjem

Želimo li izračunati broj permutacija od n elemenata među kojima ima i jednakih, njihov će broj biti očito manji. Naime, neke od permutacija ispisanih na gore opisani način nećemo više moći razlikovati i njihov će se ukupni broj smanjiti.

Primjer 8.

Odredimo sve permutacije koje možemo dobiti od slova riječi SOS.

Pretpostavimo za trenutak da možemo razlikovati oba slova S, tj. da naša riječ ima oblik S_1OS_2. Tad imamo $3! = 6$ različitih permutacija. To su redom:

$$\begin{matrix} OS_1S_2 & S_1OS_2 & S_1S_2O \\ OS_2S_1 & S_2OS_1 & S_2S_1O \end{matrix}$$

Pritom S_1OS_2 i S_2OS_1 izgledaju kao različite permutacije, ali, uklonimo li indekse, one će postati jednake.

Neka P označava broj različitih permutacija slova S, O, S. U svakoj od njih postoje dva slova S, koja ne razlikujemo. Dodavanjem indeksa od njih bismo dobili $2!$ različitih permutacija. Zato je u ovom slučaju

$$2! \cdot P = P_3 \implies P = \frac{3!}{2!} = 3.$$

Slova riječi MAMA možemo permutirati na sljedećih šest načina:

AAMM
AMAM
AMMA
MAAM
MAMA
MMAA

Razlikovanjem pojedinih slova A i M iz svake od ovih permutacija dobili bismo $2! \cdot 2! = 4$ nove permutacije. Primjerice:

$$\mathrm{AAMM} = \begin{cases} \mathrm{A_1A_2M_1M_2} \\ \mathrm{A_1A_2M_2M_1} \\ \mathrm{A_2A_1M_1M_2} \\ \mathrm{A_2A_1M_2M_1} \end{cases}$$

Na taj bismo način dobili ukupno $P_4 = 24$ permutacije od četiri različita elementa. Zato za broj permutacija P slova u riječi MAMA vrijedi:

$$2! \cdot 2! \cdot P = P_4 \implies P = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$$

Permutacije s ponavljanjem

Neka u nizu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ postoji prva skupina od k_1 identičnih elemenata, druga skupina od k_2 identičnih elemenata,. . . , r-ta skupina od k_r identičnih elemenata, $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. Bilo koji razmještaj elemenata takva niza nazivamo **permutacijom s ponavljanjem**. Njihov ukupni broj označavamo s $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ i vrijedi

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!}. \qquad (2)$$

Primjer 9.

Koliko se različitih riječi može napisati od slova riječi MATEMATIKA?

Ovdje je riječ o nizu slova A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. Zato je

$$N = P_{10}^{3,1,1,1,2,2} = \frac{10!}{3!1!1!1!2!2!} = 151\,200.$$

Po dogovoru, u ovakvim primjerima ne pišemo broj 1 niti u oznaci, niti u razlomcima:

$$N = P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!2!2!}.$$

Zadatci 2.2.

1. Koliko elemenata može najviše imati skup da broj svih njegovih permutacija ne bude veći od 12 000?

2. Na koliko načina može se složiti vlak od 12 vagona tako da u kompoziciji bude svih 12 vagona?

3. Na koliko se različitih načina može napisati popis od 32 učenika u jednom razredu?

4. Na koliko načina za stolom može sjediti obitelj koja se sastoji od dvoje djece, majke, oca i bake?

5. Koliko se različitih brojeva većih od 600 može napisati s pomoću znamenaka 2,4,5,7,9?

6. Od znamenaka $0, 1, 2, 3, 4$ sastavljeni su svi peteroznamenkasti brojevi koji nemaju jednake znamenke. Koliko ih ima? Zadatak riješiti najprije s pomoću principa o uzastopnom prebrojavanju, a zatim primjenom permutacija. Koji je način jednostavniji?

7. Na koliko se načina na šahovskoj ploči može postaviti 8 topova tako da se međusobno ne napadaju?

8. Na jednoj je konferenciji bilo predviđeno osam izlaganja. Na koliko je načina moguće načiniti raspored? Na koliko je načina to moguće učiniti ako se konferencija odvija u dva dana, svaki dan po četiri izlaganja?

— ◆ —

9. Pet dječaka i pet djevojčica treba smjestiti na 10 stolica u redu, tako da sjede naizmjenično. Na koliko se to načina može učiniti?

10. Četiri bijele i tri crne kuglice različitih veličina treba poredati u niz tako da dvije jednako obojene ne budu jedna do druge. Koliko je različitih mogućnosti takvog poretka?

11. Četiri matematičke knjige, tri knjige iz fizike, tri iz kemije i dvije iz biologije treba složiti na jednu policu tako da su knjige iz iste struke zajedno. Koliko je različitih mogućnosti slaganja?

12. **1)** Na koliko se načina 12 knjiga može poredati na polici?

2) Na koliko je to načina moguće napraviti ako su među njima *Gospodari prstenova* i komplet *Harry Pottera*, a njihove dijelove želimo složiti po redu?

13. Raspolažeš sa 6 bijelih i 6 crnih kuglica od kojih je svaka označena brojem. Na koliko se različitih načina one mogu poredati ako dvije kuglice iste boje ne smiju biti zajedno?

— ◆ —

14. Koliko permutacija skupa $S = \{1, 2, 5, 7, 9\}$

1) počinje brojem 9; **2)** ne počinje ni s 1, ni s 5;

3) ne završava sa 75?

15. Koliko permutacija skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1) počinje brojem 4;

2) ima na prva dva mjesta broj 1, 2 ili 3;

3) završava neparnim brojem;

4) završava brojem 21?

16. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kojima su srednja tri broja

1) brojevi 1, 2, 3 u tom poretku;

2) permutacija brojeva 1, 2 i 3?

17. Od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5 zapisani su svi mogući peteroznamenkasti brojevi, bez ponavljanja znamenaka. Koliko je među njima onih brojeva kod kojih parne znamenke nisu jedna pored druge?

18. Koliki je zbroj svih peteroznamenkastih brojeva koji se dobiju permutiranjem znamenaka broja 13579?

19. U zgradi od deset katova je dizalo, a u dizalu troje ljudi, muškarac, žena i dijete. Ako svatko izlazi na različitom katu, na koliko se načina može isprazniti dizalo?

20. Na koliko se načina može podijeliti 28 domino pločica između četiri igrača tako da svaki dobije 7 pločica?

21. Na koliko načina možemo od 30 ljudi načiniti tri skupine od po 10 ljudi?

— ◆ —

22. Na koliko načina možemo za okrugli stol smjestiti 6 muškaraca i 6 žena tako da osobe istoga spola ne sjede jedna do druge?

23. Na 7 stolica treba smjestiti 7 osoba. Koliko ima mogućnosti ako osobe sjede

1) u jednom redu; **2)** oko okrugla stola?

24. Od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5 načinjeni su svi peteroznamenkasti brojevi s različitim znamenkama. Koliko postoji među njima brojeva koji

1) ne počinju znamenkom 3;

2) ne počinju s 32;

3) ne počinju s 321;

4) imaju u zapisu znamenku 2 neposredno poslije znamenke 1;

5) nemaju znamenku 2 neposredno poslije ili prije znamenke 1?

25. U koliko permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ elementi 2, 3, 4 stoje jedan do drugog i to

1) u tom poretku; **2)** u bilo kojem poretku?

26. Napiši sve permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kod kojih je 2 na drugom, a 3 na četvrtom mjestu.

27. U koliko se permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ znamenke 2 i 5 nalaze na prvom i posljednjem mjestu (u bilo kojem poretku)?



28. Odredi 93., 57., 101., 59. i 82. permutaciju skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

29. Odredi 517. i 573. permutaciju skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

30. Odredi 100-tu permutaciju niza $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

31. Koje su po leksikografskom poretku permutacije OSIJEK, RIJEKA, SPLIT, ZAGREB, od odgovarajućeg skupa slova?

32. Odredi

1) 43. permutaciju početnog rasporeda IKLOR;

2) 117. permutaciju početnog rasporeda AMNOR;

3) 582. permutaciju početnog rasporeda DIKNRU.

33. Odredi redni broj svake od sljedećih permutacija skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

1) 123546; **2)** 315642;
3) 561432; **4)** 623451.

34. Odredi redni broj sljedećih permutacija koje su nastale od početnog osnovnog abecednog rasporeda:

1) SILA; **2)** ARHIV;
3) MONTER; **4)** BRUNO.



35. Odredi broj permutacija, a zatim ispiši leksikografskim poretkom sve permutacije nizova

1) 0,0,1,1,1; **2)** 1,1,2,3,3.

36. Anagramist želi presložiti slova rečenice LIJEPA NAŠA DOMOVINO. Na koliko načina on to može učiniti?

37. Koliko različitih permutacija možemo složiti iz riječi

1) ABRAKADABRA; **2)** MATEMATIKA;
3) MISSISSIPPI; **4)** KATAKOMBA?

38. Ispiši abecednim poretkom sve permutacije elemenata niza A, A, B, B, C.

39. Ispiši abecednim poretkom sve permutacije elemenata niza A, A, A, B, B, C.

40. Ispiši u rastućem poretku sve šesteroznamenkaste brojeve koji nastanu permutacijom znamenaka broja 223335.

41. Koliko permutacija niza 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 počinje s 1, koliko s 2 a koliko s 3?



42. Dokaži: $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$.

43. Broj permutacija skupa od $n+2$ elementa 56 puta je veći od broja permutacija skupa od n elemenata. Koliki je n?

44. Ako skupu od n elemenata dodamo dva elementa, broj permutacija novog skupa 90 puta je veći od broja permutacija staroga. Koliki je n?

45. Dokaži: $V_{n-1}^m = V_n^m - m \cdot V_{n-1}^{m-1}$.

46. Dokaži:

1) $V_n^k \cdot P_{n-k} = n!$; **2)** $V_n^k = \dfrac{P_n}{P_{n-k}}$;

3) $\dfrac{V_{n+k}^{n+2} + V_{n+k}^{n+1}}{V_{n+k}^n} = k^2$; **4)** $\dfrac{V_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}} = 1$.

2.3. Kombinacije

Broj podskupova sa zadanim brojem elemenata

U mnogim problemima prebrojavanja poredak izabranih elemenata nije bitan. Primjerice, u igri LOTO 7 od 39 nije važno kojim se redom izvlači prvih 7 brojeva, već samo koji su to brojevi.

Na koliko se načina može izvući 7 brojeva od 39? Općenitije, pitamo se:

- *Na koliko se načina može izvući k elemenata iz skupa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata, ne pazeći na njihov poredak?*

Označimo broj načina s C_n^k.

Primjer 1. Na koliko načina možemo odabrati dva elementa iz skupa $S = \{a, b, c, d\}$?

Jedan je izbor određen nizom duljine $n = 4$ nula i jedinica, takvim da on sadrži točno $k = 2$ jedinice. Jedinica znači da je odgovarajući element izabran, a nula da nije. Napišimo sve takve nizove i njima odgovarajući izbor elemenata:

$1, 1, 0, 0$	a, b
$1, 0, 1, 0$	a, c
$1, 0, 0, 1$	a, d
$0, 1, 1, 0$	b, c
$0, 1, 0, 1$	b, d
$0, 0, 1, 1$	c, d

Broj svih načina jednak je broju svih permutacija niza $1, 1, 0, 0$, kojih ima

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6.$$

Zadatak 1. Ispiši sve podskupove od triju elemenata iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Koliki je njihov broj?

Općenitije, izbor k elemenata iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ određen je nizom nula i jedinica duljine n, ali takvih da u njemu postoji točno k jedinica. Zato je ukupan broj načina jednak broju permutacija u nizu od n nula i jedinica, u kojem ima k jedinica i $n - k$ nula:

$$C_n^k = P_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Kombinacije

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S koji posjeduje n elemenata nazivamo **kombinacijom** u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Primjer 2. U ravnini je zadano deset točaka, od kojih nikad po tri točke nisu na jednom pravcu. Koliko se pravaca može odrediti tim točkama? Koliko trokuta postoji s vrhovima u tim točkama?

▶ Svaki je pravac određen s dvjema točkama. Te dvije točke od deset zadanih možemo odabrati na

$$C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

načina. Trokuta ima onoliko koliko ima izbora triju točaka od deset zadanih. Njih možemo odabrati na

$$C_{10}^3 = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

načina.

Primjer 3. Na koliko se načina u igri LOTO može izvući 7 brojeva i jedan dopunski broj od 39 zadanih?

▶ Najprije se izvlači 7 brojeva od 39. To se može učiniti na C_{39}^7 načina:

$$\binom{39}{7} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 15\,380\,937.$$

Nakon toga, dopunski se broj može odabrati na 32 načina. Ukupan je broj različitih izbora

$$N = 32 \cdot \binom{39}{7} = 492\,189\,984.$$

Zadatak 2. Na koliko se načina može odabrati šest brojeva u igri LOTO 6 od 45? Koliki je broj načina ako promatramo i dopunski broj?

Zadatak 3. Na koliko se načina može odabrati početna petorka od 5 igrača u košarkaškoj ekipi koja ima 10 igrača?

Zadatak 4. Na koliko se načina mogu odabrati tri kompaktna diska s police gdje se nalazi 50 takvih diskova?

Veza kombinacija, permutacija i varijacija

Broj varijacija k-tog razreda u skupu S od n elemenata je $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Sve varijacije možemo dobiti tako da najprije odaberemo k elemenata skupa S, a zatim ih permutiramo na sve moguće načine. Izbor elemenata možemo provesti na C_n^k načina, a permutirati ih na P_k načina. Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju, ukupan broj varijacija jednak je

$$V_n^k = C_n^k \cdot P_k,$$

odakle slijedi

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Primjer 4. Košarkaška momčad raspolaže s tri centra, četiri krila i pet braniča. Igru započinje jedan centar, dva krila i dva braniča. Na koliko načina trener može izabrati početnu petorku?

Centar se može odabrati na tri načina, dva krila na $\binom{4}{2} = 6$ načina, dva braniča na $\binom{5}{2} = 10$ načina. Broj različitih početnih postava je $3 \cdot 6 \cdot 10 = 180$.

Zadatak 5. Trgovački putnik ima na raspolaganju 20 različitih knjiga, no u svojoj torbi nosi samo njih 12. Ako su knjige jednakih veličina, na koliko načina on može izabrati?

Primjer 5. U ravnini je dano 25 točaka od kojih 8 leži na jednom pravcu, a osim njih ne postoje tri točke na istom pravcu. Koliko postoji trokuta s vrhovima u tih 25 točaka?

Da dobijemo trokut možemo uzeti bilo koje tri točke, s izuzetkom kad su sve tri točke s istaknutog pravca. Zato je broj trokuta jednak $\binom{25}{3} - \binom{8}{3} = 2244$.

Zadatak 6. Koji mnogokut ima 135 dijagonala?

Zadatak 7. Tri mladića i pet djevojaka igraju na plaži odbojku. Na koliko se načina mogu podijeliti u dvije ekipe po četiri osobe, ali tako da svi mladići ne budu u istoj ekipi?

Primjer 6. Snop od 52 karte sastoji se od 13 karata različite jakosti, a svaka može biti u četiri boje. Na koliko načina možemo odabrati:

1) dvije karte iste boje,
2) dvije karte različitih boja,
3) dvije karte iste jakosti,
4) dvije karte različitih jakosti?

1) Boju možemo izabrati na četiri načina, a dvije karte u toj boji na C_{13}^2 načina. $N = 4 \cdot \binom{13}{2} = 312$.

Možemo razmišljati i ovako: prvu kartu biramo po volji, pa imamo 52 mogućnosti. Nakon toga, drugu kartu biramo između 12 karata koje su iste boje. Time smo dobili uređeni par. Kako nas poredak karata ne zanima, ukupan je broj mogućnosti $N = \dfrac{52 \cdot 12}{2} = 312$.

2) Dvije boje možemo odabrati na C_4^2 načina, a po jednu kartu iz svake boje na 13 načina. $N = \binom{4}{2} \cdot 13 \cdot 13 = 1014$.

Razmišljajući na drugi način, računamo ovako: za izbor prve karte imamo 52 mogućnosti. Nakon toga, drugu kartu biramo između 39 karata koje nisu iste boje. Ukupan je broj mogućnosti za izbor dviju karata dvostruko manji: $N = \dfrac{52 \cdot 39}{2} = 1014$.

3) Razmišljajući na oba ovakva načina, dobivamo

$$N = 13 \cdot \binom{4}{2} = \frac{52 \cdot 3}{2} = 78.$$

4) Sad je $N = \binom{13}{2} \cdot 4 \cdot 4$ ili $N = \dfrac{52 \cdot 48}{2} = 1248$.

Zadatak 8. Dano je 12 točaka u ravnini od kojih nikoje tri nisu na jednom pravcu.

1) Koliko pravaca određuju ovih 12 točaka?
2) Koliko tih pravaca prolazi jednom od danih 12 točaka?
3) Koliko je trokuta određeno s tih 12 točaka?
4) Koliko trokuta ima s vrhom u jednoj uočenoj od 12 danih točaka?

Zadatak 9. U razredu od 15 djevojčica i 12 dječaka treba izabrati skupinu od 3 djevojčice i 2 dječaka. Na koliko je to načina moguće učiniti?

Primjer 7. U pokeru se dobiva 5 karata od 52. Njihov poredak nije važan. Na koliko se različitih načina može dobiti 5 karata koje sadrže:

1) jedan par (npr. K K J 6 3),
2) dva para (npr. J J 2 2 8),
3) tri karte iste jakosti (npr. 8 8 8 K 2),
4) tri karte iste jakosti i jedan par (npr. A A A 7 7)?

1) Dvije karte iste jakosti možemo odabrati na $13 \cdot \binom{4}{2}$ načina. Prvu od preostalih triju karata na 48, drugu na 44, treću na 40 načina. Množeći ove brojeve dobit ćemo permutaciju preostalih triju karata, pa je zato broj kombinacija posljednjih triju karata $3!$ puta manji i iznosi $\dfrac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!}$.

Pomnožimo ova dva broja:

$$N = 13\binom{4}{2} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!}.$$

Jesmo li time ponovno brojili permutacije? Odgovor je: ne! Mi uvijek možemo brojiti ovakve kombinacije od pet karata tako da prvo istaknemo dvije karte koje čine par, a zatim tri preostale. Te su skupine različite po svojim svojstvima.

2) Razmišljajmo na isti način: $13 \cdot \binom{4}{2}$ je načina da se odabere prvi par. Nakon što smo njega odabrali, ima $12 \cdot \binom{4}{2}$ načina za izbor drugog para. Međutim, ukupan broj načina za izbor prvih četiriju karata dvostruko je manji od umnoška ovih brojeva, jer su i prvi i drugi par skupine istih svojstava i u ovim su izborima brojeni dva puta (kao uređeni parovi). Nakon izbora prvih četiriju karata, petu možemo odabrati na 44 načina. Zato je

$$N = \frac{13\binom{4}{2} \cdot 12\binom{4}{2}}{2!} \cdot 44.$$

3) Razmišljajući kao u 1) dobivamo

$$N = 13\binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2!}.$$

4) Skupine od triju karata i od dviju karata različitih su svojstava. Zato je

$$N = 13\binom{4}{3} \cdot 12\binom{4}{2}.$$

Zadatak 10. Na koliko se načina među pet karata mogu dobiti:
1) četiri karte iste jakosti (npr. J J J J 2); **2)** pet karata iste boje;
3) pet karata različite snage, (npr. K 9 8 5 3).

Primjer 8.

Na zaslonu računala pojavljuju se brojevi zapisani s 8 znamenaka (a koji mogu počinjati s nulama). Koliko različitih brojeva postoji koji:

1) sadrže točno tri znamenke 5,

2) sadrže tri znamenke 5, tri znamenke 2 i dvije znamenke 7,

3) sadrže točno tri jednake znamenke (preostalih pet međusobno je različito),

4) imaju točno dva para jednakih znamenaka?

1) Moramo postaviti pitanje: na kojim se mjestima nalaze petice? $\binom{8}{3}$ je mogućnosti za odabir triju mjesta. Na ostala mjesta može doći bilo koja od preostalih devet znamenaka: 9^5 mogućnosti. Ukupan broj ovakvih brojeva je $\binom{8}{3} \cdot 9^5$.

2) Brojeva ima onoliko koliko i permutacija niza 5,5,5,2,2,2,7,7:

$$N = P_8^{3,3,2} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560.$$

Međutim, zadatak možemo riješiti i primjenom kombinacija. Opet se pitamo: na kojim će se mjestima pojaviti istaknute znamenke. $\binom{8}{3}$ je mogućnosti za raspored triju petica, $\binom{5}{3}$ nakon toga za raspored triju dvojki, a na preostala dva mjesta stavimo dvije sedmice. Ukupan broj mogućnosti je

$$\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

Dobili smo, dakako, isti broj kao i prije.

3) U zapisu broja pojavljuje se šest različitih znamenaka. Tih šest znamenaka možemo odabrati na C_{10}^6 načina. Od njih moramo ispisati sve moguće osmeroznamenkaste brojeve u kojih će se jedna znamenka pojavljivati tri puta. Koja znamenka? $C_6^1 = 6$ je načina za izbor istaknute znamenke. Različitih permutacija potom ima P_8^3. Zato je

$$N = C_{10}^6 \cdot C_6^1 \cdot P_8^3 = \binom{10}{6} \cdot 6 \cdot \frac{8!}{3!} = 8\,467\,200.$$

4) Zaključujući kao u prethodnom primjeru, dobili bismo

$$N = C_{10}^6 \cdot C_6^2 \cdot P_8^{2,2} = \binom{10}{6} \cdot \binom{6}{2} \cdot \frac{8!}{2!2!} = 31\,752\,000.$$

Razdioba predmeta

Primjer 9.

Na koliko se načina deset jednakih predmeta može podijeliti na četiri osobe (Moguće je da neka osoba ne dobije niti jedan predmet.)?

Predmeti su jednaki, pa ih možemo označiti kružićem. Jednu moguću razdiobu možemo opisati na sljedeći način:

$$\circ\ \circ \,|\, \circ\ \circ\ \circ\ \circ \,||\, \circ\ \circ\ \circ\ \circ$$

Ovdje smo zajedno s kružićima rasporedili i tri crtice. Crtice označavaju način dijeljenja: prva osoba dobiva dva predmeta, druga četiri, treća nijedan, četvrta četiri predmeta.

Različitih rasporeda ima koliko i permutacija od 13 elemenata među kojima su dvije skupine od po deset i tri jednaka predmeta:

$$N = P_{13}^{10,3} = \frac{13!}{10!3!} = 286.$$

Općenito, ako dijelimo n jednakih predmeta na k osoba, tad postupamo na identičan način. Različitih rasporeda ima onoliko koliko i permutacija od $n+k-1$ elementa, među kojima ima n kružića i $k-1$ crtica:

$$N = P_{n+k-1}^{n,k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

Isti broj dobit ćemo ako se zapitamo na koliko različitih načina možemo postaviti $k-1$ crticu na raspoloživih $n+k-1$ mjesta:

$$N = C_{n+k-1}^{k-1} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Primjerice, deset predmeta se na tri osobe može podijeliti na

$$\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$$

načina. Dva predmeta se na deset osoba može podijeliti na

$$\binom{2+10-1}{10-1} = \binom{11}{9} = \binom{11}{2} = 55$$

načina. (Na deset načina jedna osoba dobije dva predmeta, a na 45 načina dvije osobe dobiju po jedan predmet.)

Primjer 10.

Na koliko se načina deset jednakih predmeta može podijeliti na četiri osobe tako da svaka osoba dobije barem jedan predmet?

Označimo ponovno predmete kružićima. Poredajmo ih i postavimo između njih tri crtice, ali tako da dvije crtice ne smiju doći zajedno. Jedna moguća razdioba opisana je ovako:

$$\circ\ \circ\ \circ \,|\, \circ\ \circ \,|\, \circ \,|\, \circ\ \circ\ \circ\ \circ$$

(Prva osoba dobiva tri, druga dva, treća jedan i četvrta četiri predmeta.). Crtice se moraju ubaciti na tri od devet mogućih mjesta između kružića. Broj mogućih načina je $\binom{10-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84$.

Općenito, ako n predmeta dijelimo na k osoba, ali tako da svaka osoba mora dobiti barem jedan predmet, onda postupamo ovako: $k-1$ crticu postavimo na neka od $n-1$ mjesta između kružića. Broj je različitih načina jednak

$$N = C_{n-1}^{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Primjer 11. Na koliko se načina osam različitih predmeta može podijeliti na četiri osobe, ali tako da svaka osoba dobije po dva predmeta?

▶ Dva predmeta koja će pripasti prvoj osobi biramo na $\binom{8}{2}$ načina. Nakon toga, dva predmeta za drugu osobu možemo izabrati na $\binom{6}{2}$ načina itd. Ukupan broj različitih podjela je

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520.$$

Primijetimo da je jedna podjela određena permutacijom niza $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4$. Tako primjerice nizu

$$2, 4, 1, 1, 3, 2, 3, 4$$

odgovara podjela u kojoj prva osoba dobiva treći i četvrti, druga osoba prvi i šesti, treća osoba peti i sedmi, a četvrta osoba drugi i osmi predmet. Ovakvih permutacija ima

$$P_8^{2,2,2,2} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 2520.$$

Ako n različitih predmeta trebamo podijeliti na k osoba, ali tako da prva dobije n_1 predmeta, druga n_2 predmeta,..., posljednja n_k predmeta, $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$, broj različitih načina na koji se to može učiniti je

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}}\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Primjer 12. Nika, Marko i Jure spore se o broju načina na koji se u igri *Preferans* mogu podijeliti 32 karte tako da svaki od troje igrača dobije po 10 karata (dvije karte ostaju na stolu).

▶ Marko razmišlja ovako: deset karata prvom igraču mogu podijeliti na $\binom{32}{10}$ načina, deset drugom na $\binom{22}{10}$ načina, deset trećem na $\binom{12}{10}$ načina.

Dvije karte koje ostanu ostavit ću na stolu. Ukupan broj podjela je

$$\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}.$$

Nika problem rješava ovako: dvije karte mogu izdvojiti na $\binom{32}{2}$ načina. Od preostalih 30 karata prvom igraču mogu podijeliti 10 na $\binom{30}{10}$ načina, drugom 10 na $\binom{20}{10}$ načina, a posljednjih deset ostavit ću trećem igraču. Ukupni broj različitih podjela je

$$\binom{32}{2}\binom{30}{10}\binom{20}{10}.$$

Jure se ne slaže s tim načinima podjele jer zna da se karte dijele tako da se prvom igraču podijeli pet karata, drugom pet karata, trećem pet karata, stave se dvije karte na stol i preostalih petnaest se ponovno podijeli po pet karata svakom od igrača. Po njemu, broj različitih podjela je

$$\binom{32}{5}\binom{27}{5}\binom{22}{5}\binom{17}{2}\binom{15}{5}\binom{10}{5}.$$

Tko je u pravu?

Primjer 13.

Na maturalnoj zabavi bilo je 28 učenika jednog razreda, 16 mladića i 12 djevojaka.

1) Koliko se različitih plesnih parova može složiti u ovom razredu?

2) Na koliko se načina mogu odabrati tri plesna para?

1) Plesni par čine mladić i djevojka, $16 \cdot 12 = 192$ je načina da se oni spare.

2) Razmišljajući kao u prethodnom primjeru, prvi par možemo odabrati na $16 \cdot 12$ načina. Drugi par na $15 \cdot 11$ načina. Treći par na $14 \cdot 10$ načina. Ukupan broj izbora ipak je manji od umnoška ovih brojeva, jer nam nije važno koji je par prvi, koji drugi, a koji treći. Stoga je ispravan odgovor

$$\frac{16 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 10}{3!} = 739\,000.$$

Evo i drugog razmišljanja. Tri para možemo načiniti tako da najprije odaberemo tri mladića, na C_{16}^{3} načina, zatim odaberemo tri djevojke, na C_{12}^{3} načina. Njih možemo pridružiti mladićima na $3!$ načina. Zato je ukupan broj odabira

$$\binom{16}{3} \cdot \binom{12}{3} \cdot 3! = 739\,000.$$

Kombinacije s ponavljanjima

Pretpostavimo da birajući elemente nekog skupa imamo mogućnost izabrati isti element više puta.

- *Na koliko se načina može izabrati k elemenata iz skupa od n međusobno različitih elemenata, ako svaki element možemo birati više puta, a poredak izabranih elemenata nije bitan?*

Možemo zamisliti da iz bubnja — u kojem se nalazi n kuglica označenih brojevima od 1 do n — biramo k kuglica, jednu po jednu i to tako da se nakon svakog izbora kuglica vraća u bubanj. Redoslijed izabranih brojeva nije nam pritom važan.

Jedan takav izbor nazivamo **kombinacijom s ponavljanjem** k-tog razreda u skupu od n elemenata, a njihov ukupan broj označavamo s $\overline{C}_n^k$.

Primjer 14. Ispišimo sve kombinacije s ponavljanjem:

1) drugog razreda u skupu $S = \{1, 2, 3, 4\}$:

11 12 13 14 22 23 24 33 34 44.

Dakle, $\overline{C}_4^2 = 10$.

2) trećeg razreda u skupu $S = \{1, 2, 3\}$:

111 112 113 122 123 133 222 223 233 333.

Dakle, $\overline{C}_3^3 = 10$.

3) četvrtog razreda u skupu $S = \{1, 2\}$:

1111 1112 1122 1222 2222.

Dakle, $\overline{C}_2^4 = 5$.

4) četvrtog razreda u skupu $S = \{1, 2, 3\}$:

1111 1112 1113 1122 1123 1133 1222 1223
1233 1333 2222 2223 2233 2333 3333.

Dakle, $\overline{C}_3^4 = 15$.

U svim su primjerima kombinacije poredane *leksikografskim poretkom*. Kako ćemo utvrditi broj $\overline{C}_n^k$ za bilo koje brojeve k i n?

Provedimo sljedeću transformaciju: drugom elementu u gornjim kombinacijama dodajmo broj 1, trećem broj 2, a četvrtom broj 3. Pritom će kombinacije s ponavljanjem prijeći u kombinacije *bez ponavljanja* u većem skupu:

1) drugog razreda u skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

12 13 14 15 23 24 25 34 35 45.

2) trećeg razreda u skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

123 124 125 134 135 145 234 235 245 345.

3) četvrtog razreda u skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

1234 1235 1245 1345 2345.

4) četvrtog razreda u skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

1234 1235 1236 1245 1246 1256 1345 1346
1356 1456 2345 2346 2356 2456 3456.

Općenito, ovom transformacijom skup kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda u skupu od n elemenata prelazi u skup kombinacija bez ponavljanja k-tog razreda u skupu od $n+k-1$ elemenata. Zato je:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^n = \binom{n+k-1}{k}.$$

U gornjim primjerima ti brojevi iznose:

1) $$\overline{C}_4^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10,$$

2) $$\overline{C}_3^3 = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10,$$

3) $$\overline{C}_2^4 = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5,$$

4) $$\overline{C}_3^4 = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Primjer 15. Iz snopa od 52 karte biramo dvije, ali tako da nakon izbora svake karte zapišemo njezinu vrijednost, a samu kartu vratimo u snop. Na koliko načina možemo odabrati

1) dvije karte iste boje; **2)** dvije karte iste jakosti?

1) Boju možemo odabrati na četiri načina. Dvije karte iste boje možemo odabrati na $\overline{C}_{13}^2$ načina. Zato je $N = 4\binom{13+2-1}{2} = 4\binom{14}{2}$ načina.

2) Jakost možemo odabrati na 13 načina, a dvije karte te jakosti na $\overline{C}_4^2 = \binom{4+2-1}{2}$ načina. Zato je $N = 13\binom{5}{2}$.

Zadatci 2.3.

1. Koliko tročlanih podskupova ima u skupu od 8 elemenata? Koliko peteročlanih podskupova ima u skupu od 7 elemenata?

2. Na hrpi se nalazi 6 crvenih i 4 plave kuglice. Označene su različitim brojevima. Na koliko načina možemo odabrati:

1) tri kuglice, bez obzira na njihove boje;

2) tri jednobojne kuglice;

3) tri kuglice, tako da barem jedna među njima bude plava?

3. Zadan je skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Koliko njegovih podskupova postoji koji

1) sadrže element 1;

2) ne sadrže elemente 1 i 2;

3) sadrže elemente 1 i 2;

4) ne sadrže elemente 1, 2 i 3?

4. Na jednom skupu prisutno je 52 ljudi i treba izabrati predsjedništvo koje čini 5 ljudi. Na koliko je načina moguće napraviti izbor?

5. Na koliko se načina između 12 osoba mogu odabrati tri predstavnika? Na koliko se načina između 12 osoba u izvršnom odboru društva može odabrati predsjednik, potpredsjednik i tajnik?

6. Na nekom mačevalačkom turniru bilo je 45 dvoboja pri čemu se svaki natjecatelj borio jednom sa svakim od ostalih. Koliko je bilo natjecatelja?

— ◆ —

7. Koliko dijagonala ima trinaesterokut?

8. Koliko se pravaca može položiti kroz 6 točaka, od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu?

9. U koliko se najviše točaka može sjeći pet pravaca?

10. U koliko se točaka siječe n pravaca u ravnini ako među njima ne postoje dva paralelna niti tri koja prolaze istom točkom?

11. U koliko se točaka siječe 9 pravaca od kojih su dva paralelna, a nikoja tri ne sijeku se u jednoj točki?

12. U koliko se točaka siječe 18 pravaca od kojih je pet paralelnih, 6 se siječe u jednoj te istoj točki, a 4 u nekoj drugoj?

13. Od 11 uočenih točaka ravnine 5 ih je na istoj kružnici, a od ostalih nikoje 4 nisu na istoj kružnici. Koliko se kružnica može provući kroz tih 11 točaka tako da svaka prolazi barem kroz 3 od tih točaka?

14. Na pravcu je odabrano m točaka, a na pravcu koji je s njim paralelan n točaka. Koliko postoji trokuta s vrhovima u tim točkama?

15. U koliko se točaka siječe n pravaca među kojima je k usporednih?

16. Dan je konveksni n-terokut kojem se nikoje tri dijagonale ne sijeku u jednoj točki. Koliki je broj sjecišta njegovih dijagonala (unutar n-terokuta)?

— ◆ —

17. U 28 klupa treba smjestiti 25 učenika nekog razreda. Na koliko se to načina može učiniti?

18. Koliko se različitih sedmeroznamenkastih brojeva može napisati s pomoću znamenaka 1, 2 i 3, uz uvjet da se znamenka 2 u svakom od brojeva pojavljuje točno dva puta?

19. Branko posjeduje 9 novih knjiga, a Stjepan 7. Na koliko načina oni mogu jedan drugom posuditi po dvije knjige?

20. Na kirurškom odjelu neke bolnice ima 30 liječnika. Na koliko se načina može odabrati jedan kirurg i četiri njegova asistenta?

21. U razredu od 15 djevojčica i 12 dječaka treba izabrati skupinu od 3 djevojčice i 2 dječaka. Na koliko je to načina moguće učiniti?

22. Od 18 ruža, 10 bijelih i 8 crvenih, treba sastaviti buket od 2 bijele i 3 crvene ruže. Koliko se različitih buketa može složiti (ako smatramo da su sve ruže različite)?

23. Koliko se hokejaških postava može sastaviti od 9 napadača, 5 braniča i 3 vratara, ako postavu čini vratar, 2 braniča i 3 napadača?

24. Trideset ljudi glasa za 5 prijedloga. Na koliko načina mogu rasporediti glasove ako svatko glasa samo za jedan prijedlog?



25. Na koliko se načina iz snopa od 52 karte može izvući 13 karata?

26. Koliko je različitih mogućnosti raspodjele 32 karte na 4 igrača tako da se svakom dijeli odjednom po 8 karata?

27. Na koliko se načina mogu 52 karte podijeliti među 4 igrača tako da svaki dobije po 13 karata? (Načine kod kojih različiti igrači dobiju iste karte smatramo različitim).

28. Na koliko se načina iz snopa od 52 karte može izvući njih 13, ali tako da među njima budu 2 pika, 4 herca, 3 kare i 4 trefa (u snopu postoji po 13 karata svake boje)?

29. Na šahovskom turniru sudjeluje 12 šahista. Svaki treba odigrati partiju sa svakim. Svake večeri igra se 6 partija. Koliko dana će trajati turnir? Koliko će se partija ukupno odigrati? Koliko će se partija odigrati ako jedan šahist zbog bolesti napusti turnir nakon treće večeri?



30. U zgradi od 12 katova u prizemlju uđe u dizalo 9 osoba. Oni će izići u skupinama po 2, 3 i 4 na raznim katovima. Na koliko načina se to može dogoditi ako se dizalo na prvom katu neće zaustaviti?

31. Na koliko se načina može podijeliti 12 različitih čokoladica na troje djece tako da jedno dijete dobije tri, drugo četiri, a treće pet čokoladica?

32. Na koliko se načina može zapakirati 9 različitih knjiga u 5 paketa, ako četiri paketa sadrži po dvije, a jedan jednu knjigu?

33. Na koliko se načina 20 različitih kuglica može podijeliti na tri skupine od po 5, 7 i 8 kuglica?



34. U velikom kompletu domina najveći broj točkica na jednoj domino pločici je 18, a ne 12 kao što je uobičajeno. Koliko pločica ima u tom kompletu?

35. Koliko ima različitih trokuta kojima su duljine stranica neki od brojeva 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm?

36. Od 10 atletičara 2 su bacača, 3 skakača, a ostali su trkači. Na koliko se načina može odabrati momčad sa 6 atletičara u kojoj bi bio barem po jedan atletičar iz svakog područja?

37. Koliko ima putova duljine $m+n$ u pravokutnoj mreži dimenzije $m \times n$ koji vode iz jednog vrha pravokutnika u njemu suprotan vrh?

38. Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva postoji u binarnom sustavu? Koliko takvih brojeva postoji u heksadecimalnom sustavu?

39. Koliko različitih osmeroznamenkastih brojeva postoji ako se smiju koristiti samo znamenke 1, 2 i 3? Koliko takvih brojeva postoji kod kojih se znamenka 3 pojavljuje tri puta?



40. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbe:

1) $C_{x+1}^{3} : C_{x}^{4} = 6:5$; **2)** $C_{k+1}^{2} : C_{k}^{3} = 4:5$;

3) $C_{2n}^{n+1} : C_{2n+1}^{n+1} = \frac{4}{9}$.

41. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbe:

1) $C_{x}^{3} = \frac{1}{5}C_{x+2}^{4}$; **2)** $V_{x+3}^{2} = C_{x+2}^{3} + 20$;

3) $C_{n+1}^{n-4} = \frac{7}{15}V_{n+1}^{3}$.

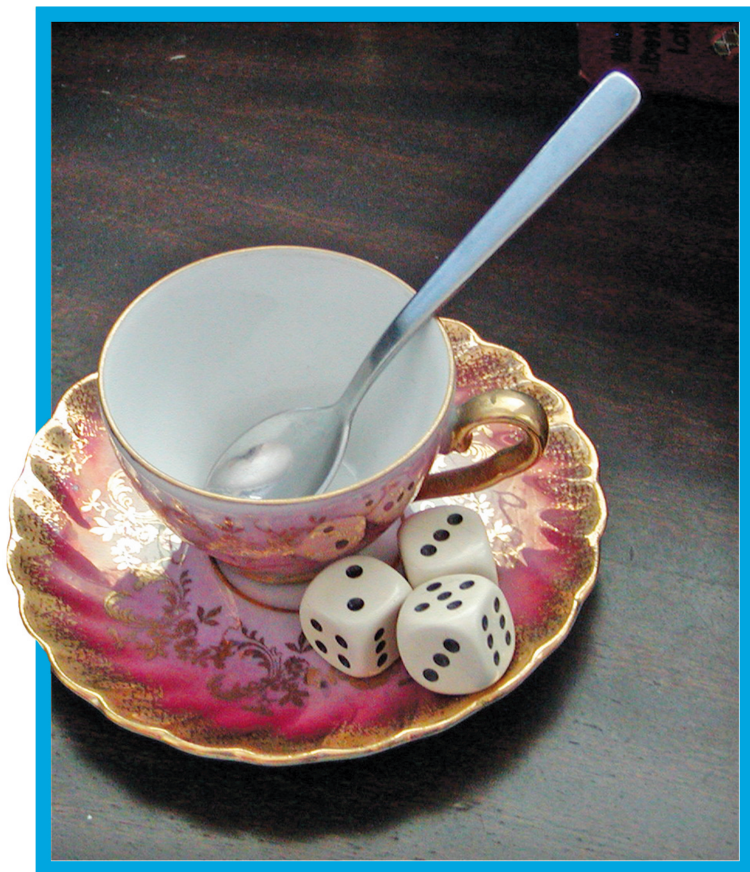
42. Riješi nejednadžbe:

1) $C_{10}^{x+1} > 2C_{10}^{x}$; **2)** $8 \cdot C_{105}^{n} < 3 \cdot C_{105}^{n+1}$.

43. Dokaži da je broj $C_{n+k}^{2} + C_{n+k+1}^{2}$ potpun kvadrat.

44. Dokaži da je $C_{n}^{k} \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_{m}^{k} \cdot C_{n}^{m}$.

3 Vjerojatnost



Opis mnogih prirodnih i društvenih zbivanja bio bi nemoguć bez poznavanja teorije vjerojatnosti. To je matematička teorija iznikla iz potrebe za rješavanjem svakidašnjih problema u kojima je prisutna neizvjesnost njihova ishoda. Zbog njezine prirodne povezanosti s predskazivanjem budućnosti, vjerojatnost je kroz povijest bila predmet mnogim spekulacijama i različitim interpretacijama, što se zadržalo do današnjih dana. Mnogobrojni 'paradoksi' govore koliko je trnovit bio put od intuitivnog poimanja vjerojatnosti do današnjeg, precizno zasnovanog područja matematike. Danas teoriju vjerojatnosti doživljavamo kao granu matematike koja se bavi opisom različitih modela u kojima se pojavljuje neizvjesnost, a koji se mogu s više ili manje uspjeha primijeniti na svakidašnje situacije.

Kolika je vjerojatnost da će sutra biti sunčan dan? Ako je nekoliko uzastopnih dana sjalo sunce, tad ćemo i ne znajući za prognozu kazati: i sutra će vjerojatno biti sunčano. Ovdje riječ "vjerojatno" označava da mi i sutra očekujemo sunčan dan, ali da istovremeno nismo u to sasvim sigurni.

Matematička teorija vjerojatnosti koristi nazive usvojene u svakidašnjem govoru. Događaju, za koji bismo u svakodnevnom govoru rekli da je "sto posto siguran", pridjeljujemo vjerojatnost 1. Što je događaj izvjesniji, to će njegova vjerojatnost biti bliža jedinici. Obratno, događaj koji je prilično nevjerojatan, imat će vjerojatnost blisku nuli. Novčić bačen uvis može ravnopravno pasti na bilo koju svoju stranu. Za svaku od njih vjerojatnost pojavljivanja je $\frac{1}{2}$. *Kolika je vjerojatnost da igraća kocka pokaže broj* 6? *Možete li dati čvrst argument za svoj odgovor?*

Osnovni su pojmovi teorije vjerojatnosti događaj i njegova vjerojatnost. Objasnimo pobliže ove pojmove.

3.1. Događaji

Pojam događaja dovodimo u vezu sa **stohastičkim pokusom**. Tako nazivamo svaki pokus čiji ishod ovisi o nekim nama nepredvidivim okolnostima i stoga je slučajan. Primjerice:

- Bacanje novčića kao ishod može imati glavu (G) ili pismo (P).
- Bacanje kocke dat će rezutat 1, 2, 3, 4, 5 ili 6.
- Provjera kvalitete nekog proizvoda koji može biti ispravan ili neispravan.
- Pojava kvara nekog uređaja tijekom nekog vremenskog razdoblja.

Ishod pokusa zovemo **elementarni događaj** i označujemo slovom ω. Takvih ishoda može biti u nekom pokusu konačno, ali i beskonačno mnogo. Biranje na sreću jedne točke unutar, recimo, jediničnog kruga ima kao mogući ishod beskonačno mnogo elementarnih događaja. Pokus u kojem promatramo vrijeme ispravnog rada nekog uređaja može imati kao ishod svaki pozitivni realni broj.

U ovom udžbeniku promatrat ćemo uglavnom[1] pokuse koji imaju konačno mnogo ishoda. Označimo te ishode s $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$.

[1] Iznimka je model geometrijske vjerojatnosti.

Skup svih mogućih elementarnih događaja, označavamo slovom Ω,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}.$$

Po volji odabrane događaje vezane uz promatrani pokus označavat ćemo velikim slovima latinične abecede: A, B, $C\dots$ Oni se sastoje od izvjesnog broja elementarnih događaja. To su dakle podskupovi od Ω.

Primjer 1.

Bacamo kocku čije su strane označene brojevima od 1 do 6. Odredimo elementarne događaje, skup Ω i opišimo neke dogadaje vezane uz ovaj pokus.

▸ Elementarni događaji su brojevi na koje kocka može pasti:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \ \dots, \quad \omega_6 = 6.$$

Skup svih elementarnih događaja je

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Evo još nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus:

$$A = \{\text{pao je parni broj}\} = \{2, 4, 6\},$$
$$B = \{\text{pao je broj veći od } 2\} = \{3, 4, 5, 6\},$$
$$C = \{\text{pao je parni broj manji od } 5\} = \{2, 4\}$$

i slično. Koliko različitih događaja postoji? Pokušajte nabrojiti što više događaja vezanih uz ovaj pokus i opisati ih riječima.

Primjer 2.

Novčić je bačen tri puta. U svakom bacanju bilježimo je li se pojavilo pismo (P) ili glava (G). Odredimo Ω, elementarne događaje te nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus.

▸ Elementarnih događaja ima osam. To su

$$\omega_1 = \text{GGG}, \quad \omega_2 = \text{GGP}, \quad \omega_3 = \text{GPG}, \quad \omega_4 = \text{PGG},$$
$$\omega_5 = \text{GPP}, \quad \omega_6 = \text{PGP}, \quad \omega_7 = \text{PPG}, \quad \omega_8 = \text{PPP},$$

(poredak nabrajanja nije važan).

Evo nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus.

$$A = \{\text{pismo se pojavilo jednom}\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$
$$B = \{\text{pismo se pojavilo u drugom bacanju}\} = \{\omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_8\},$$
$$C = \{\text{pojavila su se barem dva pisma}\} = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\},$$
$$D = \{\text{pismo se pojavilo dvaput za redom}\} = \{\omega_5, \omega_7, \omega_8\}.$$

Ispišite elementarne događaje od kojih se sastoje sljedeći događaji:

$$E = \{\text{pojavila se jedna glava}\},$$
$$F = \{\text{pismo se pojavilo barem jednom}\},$$
$$G = \{\text{glava se pojavila prije pisma}\}.$$

Koliko različitih događaja postoji?

Primjer 3.

Bacamo tri novčića. Odredimo Ω.

U nekom pokusu se ponekad elementarni ishodi, a s time i skup Ω, mogu definirati na različite načine. Ovo je primjer takvog pokusa. Ako novčiće možemo razlikovati, recimo stoga što su različitih veličina, onda se elementarni događaji mogu opisati na isti način kao u prethodnom primjeru. Novčiće poredamo tako da znamo prepoznati koji je od njih prvi, koji drugi, a koji treći. Onda je elementarni događaj niz od tri znaka, od kojih svaki može biti P ili G.

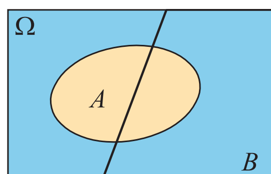
Dakle, pokus bacanja triju različitih novčića ekvivalentan je pokusu u kojem se isti novčić baca tri puta za redom.

Ako bacamo tri jednaka novčića, tada ne možemo razlikovati ishode poput pismo-pismo-glava od pismo-glava-pismo. U tom je slučaju moguće odabrati elementarne događaje na ovaj način:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \{\text{tri pisma}\},\\
\omega_2 &= \{\text{dva pisma i jedna glava}\},\\
\omega_3 &= \{\text{pismo i dvije glave}\},\\
\omega_4 &= \{\text{tri glave}\}.
\end{aligned}$$

Skup Ω sastoji se od ovih četiriju elementarnih događaja.

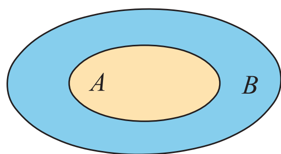
Dva istaknuta događaja. Prikazivanje događaja



Događaje prikazujemo Euler-Vennovim dijagramima. Skup Ω nazivamo još **siguran događaj**. On se ostvaruje pri svakom ishodu pokusa. Skiciramo ga obično u obliku nekog pravokutnika. Po volji odabrani događaji A, B... su podskupovi od Ω i skiciramo ih kao na slici.

Suprotnost od sigurnog događaja je **nemoguć događaj** koji se pri realizaciji pokusa nikad ne može ostvariti. Označavamo ga simbolom $\emptyset$ i zamišljamo kao prazni skup.

Uspoređivanje događaja



Događaj A povlači događaj B.

Događaji mogu biti u različitom međusobnom odnosu. Na slici lijevo skicirana su dva događaja, tako da je A sadržan u B što zapisujemo kao $A \subset B$. To znači da B sadrži sve elementarne događaje koji ulaze u događaj A. Ako se ostvario događaj A, to znači da se ostvario neki njegov elementarni događaj. No tada se ostvario i događaj B, jer on sadrži sve elementarne događaje iz A.

Kažemo da tada događaj A **povlači** događaj B i pišemo još $A \implies B$.

Primjer 4. Bacamo dvije kocke. Što je skup Ω? Istaknimo sljedeće događaje.

$$A = \{\text{oba su broja veća od } 4\},$$
$$B = \{\text{zbroj brojeva veći je od } 8\},$$
$$C = \{\text{oba su broja veća od } 2\}.$$

Uvjeri se da vrijedi $A \implies B$ i $B \implies C$.

Zamislimo da su kocke obojene različitim bojama, ili da ih bacamo jednu po jednu tako da možemo razlikovati rezultat na prvoj kocki od onog na drugoj. Onda je elementarni događaj uređeni par $(2,4)$ čime se označava da je prva kocka pokazala broj 2, a druga 4. Taj je elementarni događaj različit od $(4,2)$, iako se u oba slučaja pojavila jedna dvojka i jedna četvorka.

Uz ovaj dogovor, skup Ω sastoji se od 36 različitih elementarnih događaja, jer je toliko uređenih parova. Ispišimo ih:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Događaj A sastoji se od sljedećih elementarnih događaja:

$$A = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\},$$

a događaj B je

$$B=\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Vidimo da je $A \subset B$, dakle $A \implies B$.

Ispiši elementarne događaje sadržane u C i uvjeri se da je $B \subset C$.

No, za ove zaključke nije nam bilo potrebno toliko pisanja. Uz malo razmišljanja shvatit ćemo da $A \implies B$, jer je zbroj brojeva koji su veći od 4 sigurno veći od 8.

Usporedimo sad događaje B i C. Zbroj brojeva ne može biti veći od 8 ako oba broja nisu veća od 2 (jer inače najveći zbroj iznosi $2+6=8$). To znači: da bi se ostvario C, mora se ostvariti i B. Ova izreka upravo znači da B povlači C.

Događaji A i B su **ekvivalentni** ili **jednaki** ako se sastoje od istih elementarnih događaja. Pišemo $A = B$. Tada vrijedi istovremeno $A \implies B$ i $B \implies A$.

Nužan i dovoljan uvjet

Ovaj je odnos dvaju događaja vrlo važan i često se koristi i u svakodnevnom govoru. Zato postoje mnogi sinonimi za ovu vezu.

Ako vrijedi $A \subset B$, odnosno $A \implies B$, onda govorimo još:

- A je dovoljan uvjet za B,

- B je nužan uvjet za A.

Pojmovi **dovoljan** i **nužan uvjet** moraju biti savršeno jasni, jer su temelj za logičko razmišljanja. Ilustrirajmo ove pojmove s pomoću događaja u prethodnom primjeru. Imali smo $A \implies B$, pa je A dovoljan uvjet za B. Kažemo: da bi zbroj brojeva bio veći od 8, *dovoljno je* da svaki od njih bude veći od 4. Taj je uvjet dovoljan, ali nije nužan.

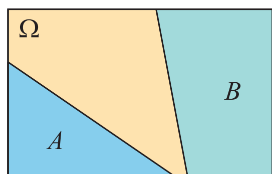
Zbroj brojeva može biti veći od 8 i kad jedna kocka padne na, recimo, 3, a druga na 6. Tad se ostvario B, ali se nije ostvario A. Zato je B nužan uvjet za A. Kažemo: da bi oba broja bila veća od 4, njihov zbroj nužno mora biti veći od 8.

Na isti se način mogu usporediti događaji B i C:

Da bi zbroj brojeva bio veći od 8, oba broja nužno moraju biti veća od 2 (*C je nužni uvjet za B*).

Želimo li da oba broja na kocki budu veća od 2, dovoljno je da njihov zbroj bude veći od 8 (*B je dovoljan uvjet za C*).

Disjunktni događaji



disjunktni događaji

Događaji A i B su **disjunktni** ako se istovremeno ne mogu ostvariti i jedan i drugi. Kažemo još da se A i B **međusobno isključuju**. Pritom nije nužno da se ostvari neki od ova dva događaja, moguće je dakle da se ne ostvari niti jedan od njih.

Primjer 5.

Bacamo jednu kocku. Koji su od sljedećih događaja međusobno disjunktni:

$A = \{\text{pao je paran broj}\}$, $B = \{\text{pao je broj } 3\}$,
$C = \{\text{pao je veći od } 4\}$, $D = \{\text{pao je neparan broj}\}$.

Disjunktni su: A i B, A i D te B i C.

Primjer 6.

Novčić bacamo četiri puta. Istaknimo sljedeće događaje:

$$A = \{\text{pojavila su se točno tri pisma}\},$$
$$B = \{\text{pojavile su se najviše dvije glave}\},$$
$$C = \{\text{pojavila se točno jedna glava}\},$$
$$D = \{\text{ostvario se niz PGGP}\}.$$

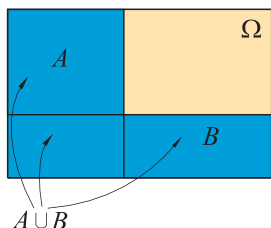
Kakav je međusobni odnos ovih događaja?

Tu je $A \subset B$, $C \subset B$, $D \subset B$. Nadalje, događaji A i C su ekvivalentni, a događaji A i D su disjunktni.

Operacije s događajima

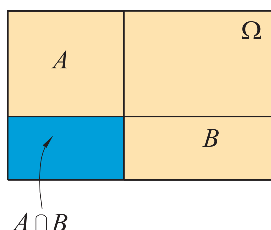
Događaji su podskupovi skupa Ω. Korištenjem skupovnih operacija možemo iz njih dobivati nove događaje. Posebno su nam zanimljive operacije unije i presjeka dvaju događaja.

Neka su A, B događaji. S pomoću njih možemo formirati nove događaje:



Unija događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario *barem jedan* od događaja A, B nazivamo **unija** događaja i označavamo s $A \cup B$.



Presjek događaja

Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila oba događaja A i B zovemo **presjek** ili **umnožak** dvaju događaja i označavamo ga s $A \cap B$ ili s AB.

Primjer 7. Bacamo jednu kocku. Istaknimo događaje

$$A = \{\text{pao je parni broj}\},$$
$$B = \{\text{pao je broj veći od 2}\}.$$

Odredimo uniju i presjek ovih događaja.

$$A \cup B = \{\text{pao je parni broj ili broj veći od 2}\}$$
$$= \{\text{pao je broj veći od 1}\} = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$A \cap B = \{\text{pao je parni broj veći od 2}\} = \{4, 6\}.$$

Zadatak 1. Bacamo dvije kocke. Označimo događaje

$$A = \{\text{zbroj brojeva je neparan}\},$$
$$B = \{\text{pojavio se broj } 1\},$$
$$C = \{\text{na obje kocke pao je broj } 1\}.$$

Opiši događaje AB, AC, BC, $A \cup C$.

Primjer 8.

Pokus se sastoji od bacanja dvaju novčića. Uočimo sljedeće događaje:

$A = \{\text{glava na prvom novčiću}\}$, $F = \{\text{barem jedna glava}\}$,
$B = \{\text{pismo na prvom novčiću}\}$, $G = \{\text{barem jedno pismo}\}$,
$C = \{\text{glava na drugom novčiću}\}$, $H = \{\text{dva pisma}\}$,
$D = \{\text{pismo na drugom novčiću}\}$, $I = \{\text{dvije glave}\}$.
$E = \{\text{jedna glava i jedno pismo}\}$,

Odredi kojem su događaju ekvivalentni sljedeći događaji: $B \cup D$, $B \cap D$, $E \cup I$, $B \cup G$, $B \cap G$, $A \cup B$, $A \cap B$, $F \cup G$, $F \cap G$.

Postoje četiri elementarna događaja. To su uređeni parovi (P,P), (P,G), (G,P), (G,G) koji određuju mogući rezultat na oba novčića. Te ćemo događaje označavati jednostavnije s PP, PG, GP, GG. Različitih događaja ima $2^4 = 16$. Devet među njima zapisani su gore (Pronađite preostalih sedam!).

Da bismo odgovorili na pitanja, najjednostavnije je odrediti elementarne događaje od kojih se sastoje gore navedeni. Tako imamo

$A = \{\mathrm{GG},\mathrm{GP}\}$, $B = \{\mathrm{PG},\mathrm{PP}\}$, $C = \{\mathrm{GG},\mathrm{PG}\}$,
$D = \{\mathrm{GP},\mathrm{PP}\}$, $E = \{\mathrm{GP},\mathrm{PG}\}$, $F = \{\mathrm{GP},\mathrm{PG},\mathrm{GG}\}$,
$G = \{\mathrm{GP},\mathrm{PG},\mathrm{PP}\}$, $H = \{\mathrm{PP}\}$, $I = \{\mathrm{GG}\}$.

Sada računamo ovako:

$$\begin{aligned} B \cup D &= \{\mathrm{PG},\mathrm{PP},\mathrm{GP}\} = G, \\ B \cap D &= \{\mathrm{PP}\} = H, \\ E \cup I &= \{\mathrm{GP},\mathrm{PG},\mathrm{GG}\} = F \end{aligned}$$

i slično u drugim slučajevima. Dobivamo: $B \cup G = G$, $B \cap G = B$, $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, $F \cup G = \Omega$, $F \cap G = E$.

Ovakav je način pronalaženja veze između događaja pouzdan, ali nije poučan. Svakako je korisnije pokušati na gornja pitanja odgovoriti direktno, koristeći veznike kao oznaku operacije:

$$\begin{aligned} B \cup D &= \{\text{pismo na prvom novčiću}\} \text{ ili } \{\text{pismo na drugom novčiću}\} \\ &= \{\text{barem jedno pismo}\} = G, \\ F \cap G &= \{\text{barem jedna glava}\} \text{ i } \{\text{barem jedno pismo}\} \\ &= \{\text{jedna glava i jedno pismo}\} = E, \\ E \cup I &= \{\text{jedna glava i jedno pismo}\} \text{ ili } \{\text{dvije glave}\} \\ &= \{\text{barem jedna glava}\} = F. \end{aligned}$$

Na sličan način riješite i ostale primjere.

Zadatci 3.1.

1. Odredi sljedeće događaje koji se javljaju pri bacanju kocke:
$A = \{$ pao je paran broj $\}$;
$B = \{$ pao je neparan broj $\}$;
$C = \{$ pao je prost broj $\}$;
$D = \{$ pao je broj djeljiv s 3 $\}$;
$E = \{$ dobiveni broj djelitelj je broja 10 $\}$.

2. Novčić se baca dok se ne pojavi glava ili četiri pisma za redom. Opiši Skup Ω. Od kojih elementarnih događaja se sastoje sljedeći događaji:
$A = \{$ pojavila se glava $\}$;
$B = \{$ pojavio se paran broj pisama $\}$.

3. Baca se kocka toliko dugo dok zbroj dobivenih brojeva ne bude veći od 4. Elementaran događaj je niz s dobivenim rezultatima bacanja, primjerice: 3,1,2 ili 2,5. Prebroji elementarne događaje. Opiši sljedeće događaje:
$A = \{$ U prvom bacanju se pojavio broj 3 $\}$;
$B = \{$ Zbroj dobivenih brojeva jednak je 6 $\}$.

4. Novčić se baca dok se dva puta za redom ne pojavi isti znak, a najviše pet puta. Opiši elementarne događaje u skupu Ω i u sljedećim događajima:
$A = \{$ pokus je završen u trećem bacanju $\}$;
$B = \{$ pokus je završen u prva tri bacanja $\}$.

5. Bacaju se dvije kocke. Bilježi se samo zbroj dobivenih brojeva. Koliko elementarnih događaja ima ovaj pokus?

6. U žari[2] se nalaze četiri kuglice, dvije jednake bijele i dvije jednake crne. Izvlačimo jednu po jednu tri kuglice, ne vraćajući ih u žaru. Opiši prostor elementarnih događaja. Odredi sljedeće događaje:
$A = \{$prva je izvučena crna kuglica$\}$;
$B = \{$prva je izvučena bijela kuglica$\}$;
$C = \{$bijela kuglica je izvučena barem jednom$\}$;
$D = \{$bijela kuglica je izvučena točno jednom$\}$;
$E = \{$izvučena je jedna bijela i dvije crne kuglice$\}$.

7. U žari imamo dvije kuglice, crnu i bijelu. Izvučemo jednu kuglicu i vratimo je natrag u žaru, pa ponovno izvučemo kuglicu. Odredi prostor elementarnih događaja ovog slučajnog pokusa.

8. Iz žare, u kojoj su dvije jednake bijele i jedna crna kuglica, izvlačimo dva puta zaredom po jednu kuglicu ne vraćajući ih natrag u žaru. Zapiši prostor elementarnih događaja ovog slučajnog pokusa.

9. Strijelac gađa pet puta zaredom u metu. Pogodak zabilježi sa $+$ a promašaj kao $-$. Koliko različitih ishoda ima ovaj slučajni pokus? Koliko različitih ishoda ima ako je važan samo ukupan broj pogodaka, ali ne i rezultat svakog gađanja?

— ◆ —

10. Bacamo dvije kocke. Bilježimo rezultat na svakoj od njih. Koliko ima elementarnih događaja? Koliko elementarnih događaja imaju sljedeći događaji: $A = \{$oba broja su parna$\}$, $B = \{$oba broja veća su od 4$\}$, $C = \{$razlika brojeva iznosi 2$\}$?

11. Dvije kuglice, crnu (c) i bijelu (b) slučajno stavljamo u tri pretinca.

1) Odredi pripadni prostor elementarnih događaja.

2) Zapiši sljedeće događaje:
$A = \{$drugi je pretinac prazan$\}$;
$B = \{$u trećem je pretincu samo jedna kuglica$\}$;
$C = \{$u drugom ili trećem pretincu su dvije kuglice$\}$.

12. Tri različite kuglice x, y, z treba rasporediti u dva pretinca.

1) Odredi pripadni prostor elementarnih događaja.

2) Odredi događaje
$A = \{$u prvom je pretincu samo jedna kuglica$\}$;
$B = \{$u drugom je pretincu kuglica z $\}$.
Odredi i opiši riječima događaje $A \cup B$ i AB.

13. Dvije jednake kuglice raspoređujemo u tri pretinca. Svaki je raspored elementarni događaj.

1) Zapiši prostor elementarnih događaja opisanog slučajnog pokusa.

2) Zapiši sljedeće događaje
$A = \{$prvi je pretinac prazan$\}$;
$B = \{$drugi je pretinac prazan$\}$;
$C = \{$treći je pretinac prazan$\}$;
$D = \{$u trećem pretincu barem je jedna kuglica$\}$.

[2] Žara (šp. *jarra* = zemljana posuda, ćup) u ovom kontekstu predstavlja posudu ili kutiju s otvorom na gornjoj strani. Predviđena je za ubacivanje glasačkih listića, kuglica ili novca.

3.2. Vjerojatnost

Uzmite novčić i bacite ga na ispravan način. Bacanje ponovite dvadeset puta. Brojite koliko će se puta pojaviti pismo. Na koncu zapišite rezultat.

Nastavite s ovim pokusom, ponovite ga nekoliko puta i zbrajajte rezultate. Iako je pojavljivanje pisma u jednom bacanju potpuno neizvjestan događaj, relativna frekvencija pojavljivanja pisma (omjer broja pojavljivanja prema broju bacanja) u velikom broju bacanja bit će uvijek broj blizak $\frac{1}{2}$.

Ovu činjenicu ljudi iskustveno znaju od davnina, a zapravo se radi o rezultatu matematičkog teorema koji nazivamo *zakonom velikih brojeva*. Jednostavnim jezikom kazano, taj zakon tvrdi da se pri ponavljanju pokusa relativna frekvencija pojavljivanja događaja približava njegovoj *vjerojatnosti*.

Sad ćemo nadopuniti ovo intuitivno poimanje vjerojatnosti. Vjerojatnost nekog događaja A označavat ćemo s $P(A)$.

Pri definiranju vjerojatnosti, ključno je shvatiti pojam *modela*. Primjerice, model ispravnog novčića pretpostavlja da je novčić ispravan (ima strane označene sa P i G) i da je način bacanja ispravan. U ovom modelu je prirodno definirati vjerojatnost pojavljivanja pisma da bude

$$P(\{\mathrm{P}\}) = \frac{1}{2}.$$

Novčić je simetričan, pa onda mora biti i

$$P(\{\mathrm{G}\}) = \frac{1}{2}.$$

Kažemo da novčić s jednakom vjerojatnošću pada na bilo koju svoju stranu. Pri bacanju jednog novčića skup $\Omega = \{\mathrm{P}, \mathrm{G}\}$ je skup svih mogućih ishoda. Dakle, u pokusu bacanja ispravnog novčića jedanput, oba ishoda imaju jednaku vjerojatnost i zbroj tih vjerojatnosti iznosi 1.

Ako novčić ili način bacanja nije ispravan, onda ovaj model nije prikladan. Događaji P i G imat će neke druge vjerojatnosti. Takav ćemo model objasniti u nastavku.

Zamislimo sad složeniji pokus, s više mogućih ishoda — poput bacanja kocke. U tom pokusu, osim elementarnih, možemo promatrati i neke druge događaje. Ponavljamo li taj pokus više puta, primijetit ćemo da će se neki događaji pojavljivati češće nego drugi. To znači da je njihova vjerojatnost veća. Napravimo sljedeći pokus.

Primjer 1.

Bacimo jednu kocku trideset puta. Bilježimo pojavljivanje sljedećih događaja:

$$A = \{\text{kocka je pokazala broj } 1\},$$
$$B = \{\text{kocka je pokazala broj } 6\},$$
$$C = \{\text{kocka je pokazala paran broj}\},$$

Na temelju rezultata pokusa i njegove analize odgovorimo na pitanje: kolike su vjerojatnosti ovih događaja?

▶ Ako se bacanje nastavi i računaju relativne frekvencije, primijetit ćemo da su one za događaj A i događaj B približno jednake, dok je relativna frekvencija za događaj C otprilike tri puta veća.

Zato bi vjerojatnosti događaja A i B trebale biti jednake, a vjerojatnost događaja C trebala bi biti tri puta veća.

Iako je ovaj eksperiment potpuno slučajan, i moguće je da kocka u svih 30 bacanja padne na isti broj, to se u praksi neće dogoditi. Umjesto kaotičnog ponašanja, primijetit ćemo da se pojavljivanje ovih događaja podvrgava čvrstim zakonitostima. One su povezane s *vjerojatnostima* za pojavljivanje ovih događaja.

Kocka može ravnopravno pasti na bilo koji broj, pa je logično da su vjerojatnosti pojavljivanja rezultata 1 i rezultata 6 jednake. Isto naravno vrijedi i za svaki drugi elementarni ishod. Dakle, jedinica će se pojavljivati u prosjeku svaki šesti put. Stoga ćemo za vjerojatnost ovog događaja uzeti

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

Na isti način, možemo napisati $P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{1}{2}.$

Vjerojatnost je funkcija koja svakom elementarnom događaju pridružuje pozitivan broj:

Vjerojatnost

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ skup svih elementarnih događaja. Vjerojatnost P je definirana ako su zadani brojevi

$$P(\omega_1) = p_1, \quad P(\omega_2) = p_2, \ldots, \quad P(\omega_N) = p_N.$$

To su pozitivni brojevi i mora vrijediti

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1.$$

Ako je A bilo koji događaj, onda se njegova vjerojatnost dobiva kao zbroj vjerojatnosti elementarnih događaja od kojih se A sastoji.

Skup Ω i na njemu definiranu vjerojatnost P nazivat ćemo **vjerojatnosni prostor**.

Dakle, ako je primjerice $A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_8\}$, onda je

$$P(A) = p_2 + p_5 + p_8.$$

Paran broj na kocki je događaj $C = \{2,4,6\}$ pa je njegova vjerojatnost prema tome

$$P(C) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Primjer 2.

U dugoročnoj prognozi vremena rabe se vjerojatnosne metode. Agencija *Dobar glas* u travnju započinje pripreme za veliki koncert na otvorenom koji se treba održati 1. rujna. U kalkulaciji troškova bitnu stavku čini dodatna zaštita od moguće kiše.

Vjerojatnost da će 1. rujna biti sunčan može se procijeniti na temelju statističkih podataka o vremenu na taj datum. Recimo da ti podatci za posljednjih 100 godina govore sljedeće: broj sunčanih dana 62, broj dana s oblačnim vremenom 28, broj kišnih dana 10. Koje je brojeve prikladno odabrati za vjerojatnost tih događaja u tekućoj godini? Kolika je vjerojatnost da na taj dan neće kišiti?

Vjerojatnosti procjenjujemo preko relativnih frekvencija. Označimo i promatrane događaje sa S (sunčano), O (oblačno) i K (kišovito). Prikladno je uzeti

$$P(S) = \frac{68}{100} = 0.62,$$
$$P(O) = \frac{28}{100} = 0.28,$$
$$P(K) = \frac{10}{100} = 0.10.$$

Događaj "neće kišiti" uključuje elementarne događaje S i O, pa je njegova vjerojatnost $0.62 + 0.28 = 0.9$.

Ilustrirajmo zadavanje vjerojatnosti na još nekoliko jednostavnih primjera. Ponovimo najprije naučeno:

- **Novčić.** Dva su elementarna događaja: $\omega_1 = \mathrm{P}$, $\omega_2 = \mathrm{G}$. Ako je novčić ispravan i način njegova bacanja uobičajen, onda je prirodno pretpostaviti da su vjerojatnosti pojavljivanja obaju ovih događaja jednake: $p_1 = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $p_2 = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$.

- **Kocka.** Za ispravnu kocku prirodno je uzeti $p_i = P(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{6}$, za svaku od šest mogućnosti na koje kocka može pasti. Za događaje vezane uz pokus bacanja kocke imamo primjerice:

$$P(\{\text{pao je paran broj}\}) = P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6},$$

$$P(\{\text{pao je broj veći od } 2\}) = P(\{3,4,5,6\}) = \frac{4}{6}.$$

- **Neispravni novčić.** Dva su elementarna događaja $\omega_1 = \mathrm{P}$, $\omega_2 = \mathrm{G}$. Međutim, zbog nesimetričnosti novčića ili možda zbog načina njegova bacanja, jedna njegova strana, recimo P, pojavljuje se češće nego druga. Sad je $p_1 > p_2$.

Zadatak 1. Novčić bacaj na podlogu tako da ga ispustiš s visine od 10 cm, okrenutog uvijek pismom prema gore. Na temelju većeg broja bacanja, procijeni vjerojatnost pojave pisma.

- **Bacanje dvaju različitih novčića.** Četiri su elementarna događaja, jer razlikujemo jedan novčić od drugog:

	1. novčić	2. novčić
ω_1 — palo je	P	P
ω_2 — palo je	P	G
ω_3 — palo je	G	P
ω_4 — palo je	G	G

- **Bacanje dvaju identičnih novčića.** Sad ishode (P,G) i (G,P) ne možemo razlikovati pa postoje samo tri elementarna događaja:

$$\omega_1 = \{\text{pala su dva pisma}\},$$
$$\omega_2 = \{\text{palo je jedno pismo i jedna glava}\},$$
$$\omega_3 = \{\text{pale su dvije glave}\}.$$



kutak

PIERRE DE FERMAT



Pierre de Fermat (Beamont-de-Lomagne, 17. kolovoza 1601. – Castres ili Toulouse, 12. siječnja 1665.) francuski je matematičar. Po zanimanju bio je pravnik. Za života nije objavljivao svoje matematičke radove, već je to učinjeno tek nakon njegove smrti. Zajedno s Pascalom drži se osnivačem teorije vjerojatnosti. Pomogao je u zasnivanju analitičke geometrije kao i diferencijalnog i integralnog računa. U fizici je dokazao da se zraka svjetlosti lomi tako da svjetlo bira put koji će prevaliti u najkraćem vremenu. Najpoznatiji je po tvrdnji nazvanoj njemu u čast velikim (ili posljednjim) Fermatovim teoremom u kojoj navodi da jednadžba $x^n + y^n = z^n$ nema cjelobrojnih rješenja za prirodni broj $n > 2$. Fermat je na rubu knjige napisao da je pronašao čudnovat dokaz te tvrdnje, no da je margina premalena da ga zapiše. Tu tvrdnju preko tri stotine godina nije nitko uspio dokazati, iako je bilo objavljeno na desetke pogrešnih rješenja a broj matematičara i inih koji su problem pokušali riješiti mjeri se stotinama tisuća. Pri pokušaju njegova rješavanja zasnovana su čitava nova područja matematike. Dokazao ga je 1995. g. engleski matematičar A. Wiles složenom matematičkom tehnikom.

Međutim, vjerojatnosti ovih elementarnih događaja nisu jednake, već mora biti (za ispravne novčiće i bacanje) $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{2}$, $P(\omega_3) = \frac{1}{4}$.

- **Bacanje dviju kocki.** Postoji 36 elementarnih događaja. Da bismo razlikovali događaje poput $(2,5)$ i $(5,2)$, možemo zamisliti da su kocke obojene različitim bojama ili pak da umjesto dviju kocaka istovremeno, bacamo jednu kocku dva puta tako da znamo koji je rezultat na prvoj, a koji rezultat na drugoj kocki. Ako su kocke i način bacanja ispravni, prirodno je pretpostaviti da su svi elementarni događaji jednako vjerojatni.

Svojstva vjerojatnosti

Izvedimo neka svojstva vjerojatnosti, koja slijede neposredno iz definicije. Skup Ω sadrži sve elementarne događaje pa je

$$P(\Omega) = p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1.$$

S druge strane nemoguć događaj $\emptyset$ ne sadrži nijedan elementaran događaj, pa je

$$P(\emptyset) = 0.$$

Ako je $A \subset B$ onda je ili $A = B$, ili B sadrži elementarne događaje koji se ne nalaze u A. U prvom je slučaju $P(A) = P(B)$, a u drugom $P(A) < P(B)$. To znači da vrijedi $P(A) \leqslant P(B)$.

Neka su sada A i B dva po volji odabrana događaja. Pokažimo da vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Radi jednostavnijeg zapisivanja, odabrat ćemo neki konkretni primjer. Neka je

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \qquad B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_7\}.$$

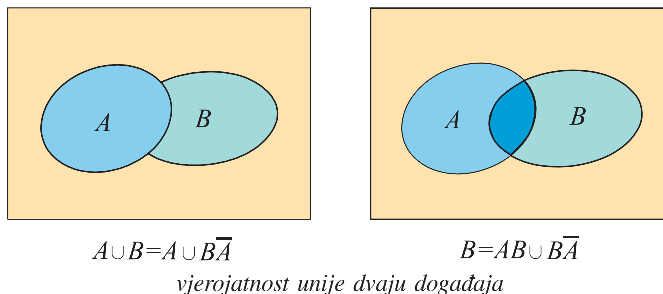
Onda vrijedi

$$A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_7\}, \qquad AB = \{\omega_2, \omega_4\}.$$

pa je

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= p_1 + p_2 + p_4 + p_5 + p_7 \\ &= (p_1 + p_2 + p_4) + (p_2 + p_4 + p_5 + p_7) - (p_2 + p_4) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB). \end{aligned}$$

Sljedeća slika opisuje ovu situaciju:



$A \cup B = A \cup B\overline{A}$ $\qquad$ $B = AB \cup B\overline{A}$

vjerojatnost unije dvaju događaja

Lako je vidjeti da isti zaključak možemo provesti u slučaju bilo kojih drugih događaja A i B.

Posebice, ako su A i B disjunktni, onda je $AB = \emptyset$ pa je i $P(AB) = 0$. Iskažimo i zapamtimo izvedena svojstva vjerojatnosti:

Svojstva vjerojatnosti

Vjerojatnost ima svojstva
$$P(\Omega) = 1, \qquad P(\emptyset) = 0.$$
Ako je $A \subset B$, onda je
$$P(A) \leqslant P(B).$$
Za bilo koje događaje A i B vrijedi
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$
Ako su A i B disjunktni događaji, onda je
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Primjer 3.

Želeći se našaliti s prijateljima u igri *Monopola*, Jure je izbrisao jednu točku sa strane kocke koja označava broj 5, a ucrtao dvije na stranu na kojoj je broj 1, tako da njegova kocka ima sljedeće brojeve na svojim stranama: 2, 3, 3, 4, 4, 6. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja ako bacamo ovakvu kocku:
$$A = \{\text{pojavio se paran broj}\};$$
$$B = \{\text{pojavio se broj veći od } 2\};$$
$$C = \{\text{pojavio se broj } 5\}.$$

Pokus bacanja kocke ima četiri moguća ishoda: $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 4$ i $\omega_4 = 6$. Ako pretpostavimo da je kocka bila ispravna, tad je razumno pridijeliti ovim elementarnim događajima vjerojatnosti
$$p_1 = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{6}, \quad p_2 = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3},$$
$$p_3 = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}, \quad p_4 = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{6}.$$
Događaju A odgovaraju sljedeći elementarni događaji:
$$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\},$$
te je
$$P(A) = p_1 + p_3 + p_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$
Događaju B odgovaraju elementarni događaji $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, te je
$$P(B) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$
Događaj C je za ovu kocku nemoguć, $P(C) = 0$.

Klasični vjerojatnosni prostor

Ako pokus ima konačno mnogo ishoda i ako su svi elementarni događaji jednako vjerojatni (poput bacanja ispravnog novčića, kocke, izvlačenja broja u LOTU, lutriji ili ruletu, izbor karte iz snopa i sl.), onda govorimo da se radi o *klasičnom vjerojatnosnom prostoru*. Riječ "klasični" ovdje se rabi jer se problemi iz kojih je iznikla teorija vjerojatnosti mogu opisati ovim modelom.

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ skup svih elementarnih događaja i $p_1, \ldots, p_N$ pripadne vjerojatnosti. Kako su svi ti brojevi jednaki, a njihov je zbroj 1, vrijedi

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Da bismo izračunali vjerojatnost nekog događaja A, nije nam više potrebno znati *koje* elementarne događaje A sadrži, već samo *koliko ih ima*. Naime, ako A sadrži M elementarnih događaja, $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_M}\}$, tad je

$$P(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_M} = M \cdot \frac{1}{N} = \frac{M}{N}.$$

Ovu formulu možemo interpretirati na sljedeći način: svaki elementarni događaj nazovimo mogućim ishodom (svi su jednako vjerojatni). Tako je

$N =$ broj svih mogućih ishoda.

Elementarne događaje koji su sadržani u A nazovimo povoljnima za događaj A:

$M =$ broj svih povoljnih ishoda.

Klasična vjerojatnost

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja računa se formulom:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}}.$$

Primjer 4.

Bacamo dvije ispravne kocke. Kolike su vjerojatnosti sljedećih događaja:

$$A = \{\text{pojavile su se dvije šestice}\},$$
$$B = \{\text{pojavila se jedna jedinica i jedna dvojka}\},$$
$$C = \{\text{pojavila su se dva jednaka broja}\},$$
$$D = \{\text{zbroj brojeva jednak je } 5\},$$
$$E = \{\text{pojavio se broj veći od } 2\}?$$

Samo je jedan ishod povoljan za A: elementarni događaj $(6,6)$. Zato je $P(A) = \frac{1}{36}$. Dva su ishoda povoljna za događaj B: to su elementarni događaji $(1,2)$ i $(2,1)$. Ovo su različiti ishodi bacanja dviju kocaka! $P(B) = \frac{2}{36}$. Šest je povoljnih ishoda. $P(C) = \frac{6}{36}$

Događaj D ima četiri povoljna ishoda: $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$. Zato je $P(D) = \frac{4}{36}$.

Događaj E ima 32 povoljna ishoda, jer je svaki ishod povoljan osim ishoda $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$. Zato je $P(E) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$.

Primjer 5.

Izvlačimo na sreću jednu kartu iz snopa od 52 karte. Kolika je vjerojatnost da je ta karta Q (dama). Kolika je vjerojatnost da je njezina boja ♠ (pik). Kolika je vjerojatnost da je ta karta dama ili pik boje?

Označimo s A i B događaje:

$$A = \{\text{izabrana karta je dama}\},$$
$$B = \{\text{izabrana karta je pik boje}\}.$$

Četiri su dame, vjerojatnost događaja A je $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. 13 je karata pik boje pa je $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Događaj C unija je prvih dvaju. Broj povoljnih ishoda nije jednak $17 = 4 + 13$, jer događaji A i B nisu disjunktni. Njihov je presjek AB pikova dama! Zato je $P(C) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$. Primijetimo da je ovdje $P(AB) = \frac{1}{52}$ i da vrijedi:

$$P(A \cup B) = P(C) = \frac{4}{13} = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Primjer 6.

U kutiji se nalazi deset kuglica, šest plavih i četiri crvene. Biramo na sreću dvije kuglice. Odredimo vjerojatnosti sljedećih događaja:

$A = \{\text{obje su kuglice plave}\};$
$B = \{\text{obje su kuglice iste boje}\};$
$C = \{\text{jedna je kuglica plava, a druga crvena}\}.$

Da bismo postavili jednostavniji model, zamislit ćemo da sve kuglice možemo razlikovati. (Možemo zamisliti da su sve one označene različitim brojevima, od 1 do 10.) Dvije kuglice iz skupa od 10 kuglica možemo odabrati na $N = \binom{10}{2} = 45$ načina. Povoljnih za događaj A je $M = \binom{6}{2} = 15$, jer se na toliko načina mogu izabrati tri kuglice iz skupa od šest plavih kuglica. Zato je

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

Broj povoljnih ishoda za događaj B je

$$M = \binom{6}{2} + \binom{4}{2} = 15 + 6 = 21$$

jer kuglice mogu biti ili plave ili crvene. Zato je

$$P(B) = \frac{M}{N} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

Odredimo broj povoljnih ishoda za događaj C. Plavu kuglicu možemo odabrati na šest, a crvenu na četiri načina, pa je $M = 6 \cdot 4 = 24$. Zato

$$P(C) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

Primjer 7.

Kolika je vjerojatnost da će igrač koji je zaokružio jednu kombinaciju u igri LOTO 7 od 39 pogoditi svih sedam brojeva? Kolike su vjerojatnosti za preostale dobitke (za točno pogođenih 6, 5 ili 4 broja)?

Različitih kombinacija ima $N = \binom{39}{7}$. Povoljnih za glavni dobitak je $M_7 = 1$. Vjerojatnost dobitka iznosi

$$d_7 = \frac{M_7}{N} = \frac{1}{\binom{39}{7}} = \frac{1}{15\,380\,937} = 6.50 \cdot 10^{-8}.$$

Događaje i s puno većom vjerojatnošću tretiramo kao praktično nemoguće. Ipak, zbog velikog broja ukupno ispunjenih kombinacija, ovaj se događaj s vremena na vrijeme ostvaruje.

Šest brojeva između sedam izvučenih možemo odabrati na $\binom{7}{6}$ načina. Jedan broj između preostalih možemo odabrati na 32 načina. Ako zaokružimo bilo koju od ovih $M_6 = \binom{7}{6} \cdot 32$ kombinacija, dobit ćemo zgoditak od šest pogodaka. Zato je:

$$d_6 = \frac{M_6}{N} = \frac{\binom{7}{6} \cdot 32}{\binom{39}{7}} = \frac{224}{15\,380\,937} = 1.46 \cdot 10^{-5}.$$

Ovaj je događaj 224 puta vjerojatniji od prethodnog.

Pet brojeva između sedam možemo odabrati na $\binom{7}{5}$ načina, a dva broja iz skupa od 32 broja koji nisu izvučeni na $\binom{32}{2}$ načina. Zato je vjerojatnost dobitka od pet pogodaka:

$$d_5 = \frac{\binom{7}{5}\binom{32}{2}}{\binom{39}{7}} = \frac{10\,416}{15\,380\,937} = 6.77 \cdot 10^{-4}$$

(prije računanja umnožaka korisno je skratiti brojnik s nazivnikom).

Vjerojatnost zgoditka od četiri pogotka je:

$$d_4 = \frac{\binom{7}{4}\binom{32}{3}}{\binom{39}{7}} = \frac{173\,600}{15\,380\,937} = 0.0113\ .$$

Vjerojatnost da ne pogodimo niti jedan broj je:

$$d_0 = \frac{\binom{32}{7}}{\binom{39}{7}} = 0.219\ .$$

Primjer 8.

U razredu se nalazi 30 učenika. Na jednom satu nastavnica pita pet nasumce odabranih učenika. Kolika je vjerojatnost da će biti pitan učenik NN? Kolika je vjerojatnost da će biti pitana dva učenika, NN i MM?

▶ Broj svih mogućih ishoda u oba je slučaja $N = \binom{30}{5}$. Koliko je slučajeva povoljnih za prvi događaj? Onoliko koliko postoji različitih petorki učenika među kojima se nalazi NN. To znači da četiri preostala učenika možemo odabrati po volji između 29 preostalih: $M = \binom{29}{4}$. Zato je:

$$P(A) = \frac{\binom{29}{4}}{\binom{30}{5}} = \frac{\frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Za događaj B vrijedi:

$$P(B) = \frac{\binom{28}{3}}{\binom{30}{5}} = \frac{\frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{2}{87}.$$

Primjer 9.

Bačeno je 12 kocaka. Kolika je vjerojatnost da će se svaki od brojeva $1, 2, \ldots, 6$ pojaviti dvaput?

▶ *Prvo rješenje.* Rezultat pokusa je niz od 12 brojeva uzetih iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kako se na svakoj kocki može pojaviti bilo koji od tih brojeva, broj svih mogućih ishoda je $N = 6^{12}$.

Koliko je povoljnih? Onoliko koliko i različitih permutacija (s ponavljanjima) niza $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6\}$ jer svaka takva permutacija daje povoljan ishod bacanja:

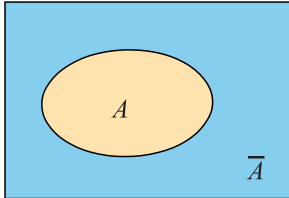
$$M = P_{12}^{2,2,2,2,2,2} = \frac{12!}{(2!)^6}.$$

Tako dobivamo $p = M/N = 0.00344$.

Drugo rješenje. Do broja povoljnih kombinacija možemo doći i drukčijim razmišljanjem. Znamo da se u povoljnoj kombinaciji moraju pojaviti točno dvije jedinice, dvije dvojke itd. Pitanje je: *na kojim kockama*? Dvije se jedinice mogu pojaviti na bilo kojim kockama, dakle na C_{12}^2 različitih načina. Nakon toga, za dvije dvojke imamo na raspolaganju deset kocaka, što daje C_{10}^2 načina itd. Ukupan broj načina za pojavljivanje povoljnog događaja je

$$M = \binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{12!}{(2!)^6}.$$

Suprotni događaji



komplement događaja

Komplement događaja

Događaj koji se ostvaruje onda i samo onda ako se A nije ostvario naziva se **komplementom** ili **suprotnim događajem** događaja A. Označavamo ga s $\overline{A}$ ili s A^c.

Neka je A po volji odabran događaj, a $\overline{A}$ njegov komplement. Onda vrijedi $A \cup \overline{A} = \Omega$ i pritom su A i $\overline{A}$ disjunktni. Zato, po svojstvima vjerojatnosti vrijedi

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

te je $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Time smo pokazali:

Vjerojatnost komplementa

Za svaki događaj A vrijedi $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

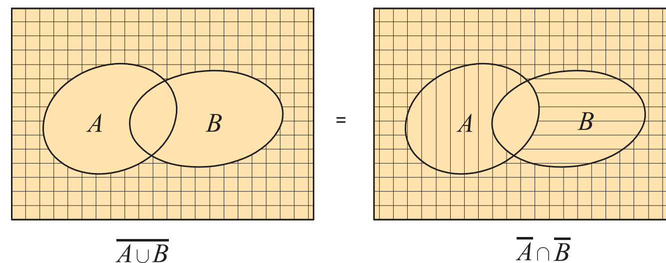
De Morganovi zakoni

Veza između operacija komplementiranja, unije i presjeka iskazana je u sljedećim formulama:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (2)$$

Te formule nazivamo **de Morganovi zakoni**. Evo slikovne interpretacije prve formule



de Morganovi zakoni

Dokažimo (1):

$$\omega \in \overline{A \cup B} \iff \omega \notin A \cup B \iff \omega \notin A \text{ i } \omega \notin B$$
$$\iff \omega \in \overline{A} \text{ i } \omega \in \overline{B} \iff \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Drugu formulu možemo dokazati na sličan način. Međutim, korisno je vidjeti da ona slijedi iz prve formule. Naime, za svaki događaj vrijedi $\overline{\overline{A}} = A$, pa možemo računati ovako

$$A \cup B = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = \text{ po (1) } = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}},$$

te je

$$\overline{A \cup B} = \overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Primjer 10.

Neka su A i B događaji, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(AB) = 0.2$. Odredimo $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(\overline{A}\,\overline{B})$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$, $P(A\overline{B})$, $P(\overline{A}B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7,$$
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.6,$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0.5,$$
$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.3,$$
$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0.8,$$
$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.2,$$
$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = 0.3.$$

Primjer 11.

Algebra prekidača. De Morganove zakone možemo ilustrirati koristeći se jednostavnim modelima serijskog i paralelnog spoja.

1. Serijski spoj. Neka u serijskom spoju dviju sklopki događaj A označava da je prva sklopka isključena, a događaj B da je isključena druga sklopka.



Veza između točaka 1 i 2 neće postojati ako se ostvari barem jedan od događaja A ili B:

$$\{\text{ne postoji veza}\} = A \cup B.$$

Veza između tih točaka postojat će ako se nije ostvario niti događaj A, niti događaj B (nema prekida niti na jednoj sklopki):

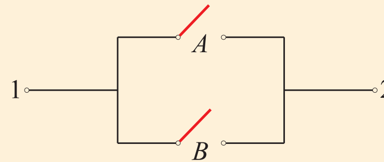
$$\{\text{postoji veza}\} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Ova su dva događaja komplementarna. Zato vrijedi

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Dobili smo prvu de Morganovu formulu.

2. Paralelni spoj. Neka su dvije sklopke spojene u paralelnom spoju:



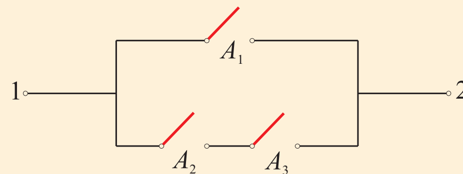
Onda vrijedi:

$$\{\text{ne postoji veza}\} = A \cap B,$$
$$\{\text{postoji veza}\} = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}.$$

Primjer 12. Uređaj je prikazan shemom na slici. Neka događaj A_i označava prekid na dijelu i, $i = 1, 2, 3$. Odredi izraz za događaj

$$A = \{\text{uređaj je prestao s radom}\},$$

kao i za događaj $\overline{A}$.



▶ Uređaj prestaje s radom ako se ostvari događaj A_1 i barem jedan od događaja A_2, A_3. Dakle,

$$A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$$

i po de Morganovim formulama

$$\overline{A} = \overline{A_1 \cap (A_2 \cup A_3)} = \overline{A}_1 \cup \overline{A_2 \cup A_3} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3.$$

Zadatak 2. De Morganovi zakoni poopćavaju se na uniju i presjek n događaja:

$$\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n,$$
$$\overline{A_1 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \ldots \cup \overline{A}_n.$$

Ilustrirajte ove formule s pomoću serijskog i paralelnog spoja n sklopki.

Zadatci 3.2.

1. Vjerojatnosti elementarnih događaja iz skupa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ su
$$P(\{\omega_1\}) = 0.22,$$
$$P(\{\omega_2\}) = 0.41,$$
$$P(\{\omega_3\}) = 0.25,$$
$$P(\{\omega_4\}) = 0.12.$$
Kolike su vjerojatnosti događaja $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$?

2. Koja od sljedećih definicija vjerojatnosti je ispravna ako je skup $\Omega = \{a, b, c\}$
1) $P(\{a\})=0.3$, $P(\{b\})=0.5$, $P(\{c\})=0.1$;
2) $P(\{a\})=0.3$, $P(\{b\})=0$, $P(\{c\})=0.7$;
3) $P(\{a\})=0.5$, $P(\{b\})=0.7$, $P(\{c\})=-0.2$;
4) $P(\{a\})=0.5$, $P(\{b\})=0.4$, $P(\{c\})=0.2$?

3. Neki pokus ima četiri elementarna ishoda: a, b, c i d. Poznato je da se a javlja dvostruko češće nego c, b trostruko češće nego c, a d jednako često kao a ili c. Kolike su vjerojatnosti za pojavu tih ishoda?

4. Za događaje A i B vrijedi $A \cup B = \Omega$. Ako je $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$, kolika je vjerojatnost $P(AB)$?

5. Za događaje A i B vrijedi
$$P(A) = 0.5, \ P(A \cup B) = 0.8, \ P(AB) = 0.3.$$
Kolika je vjerojatnost $P(B)$?

6. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani broj od 1 do 12 djelitelj broja 12?

7. Kolika je vjerojatnost da ćemo slučajnim odabirom nekog prirodnog broja između 1 i 30 odabrati broj koji je djelitelj broja 30?

8. Brojevi $1, 2, \ldots, n$ napisani su u slučajnom poretku. Izračunaj vjerojatnost da se znamenka 2 pojavi neposredno nakon znamenke 1.

9. Bacamo dvije kocke.
1) Kolika je vjerojatnost da smo dobili zbroj 7?
2) Kolika je vjerojatnost da smo dobili paran zbroj?

10. Slučajni se pokus sastoji iz bacanja simetrične kocke i novčića. Odredi vjerojatnost sljedećih događaja:
1) novčić pokazuje pismo a kocka paran broj;
2) na kocki je prost broj;
3) novčić pokazuje pismo.

11. Ako se zna da je od 100 žarulja 5 neispravnih, kolika je vjerojatnost da će od tri slučajno odabrane žarulje sve tri biti valjane?

12. U žari se nalazi 6 žutih i 4 modre kuglice. Ako slučajno izvučemo dvije kuglice, kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:
1) obje su kuglice žute;
2) kuglice su različitih boja;
3) obje su kuglice modre.

13. U kutiji se nalaze 7 bijelih i 3 crne kuglice. Izvlačimo odjednom 2 kuglice. Koja je najvjerojatnija kombinacija boja izvučenih kuglica?

14. 6 bijelih, 4 crne i 2 plave kuglice redaju se na sreću. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije biti bijele?

15. Iz snopa od 52 karte izvlače se dvije. Kolika je vjerojatnost da će među njima biti
1) dvije pik karte;
2) jedna pik i jedna herc karta;
3) dva asa;
4) jedan as i jedan kralj.

16. Od stotinu zlatnika dva su lažna. Kolika je vjerojatnost da će slučajnim izborom 98 zlatnika biti uzeta i dva lažna?

17. U skupini od 12 akumulatorskih baterija, 4 su trenutačno prazne, a ostale su pune. Četiri baterije odabrane su na sreću. Izračunaj vjerojatnost sljedećih događaja
1) sve četiri odabrane baterije su prazne;
2) tri baterije su prazne;
3) točno dvije su prazne;
4) nijedna nije prazna.

18. Na devet kartica napisani su brojevi od 1 do 9. Slažući na sreću, dijete je poredalo tri kartice. Kolika je vjerojatnost da je tako napisan troznamenkasti broj veći od 540?

19. U prostoriji se nalazi šest bračnih parova. Ako odaberemo na sreću dvoje ljudi, kolika je vjerojatnost da su
1) različitog spola;
2) bračni par?

20. Deset kartica obilježeno je brojevima od 1 do 10. Kolika je vjerojatnost da će se izvući jedan paran i jedan neparan broj ako

1) izvučemo odjednom obje kartice;

2) izvučemo prvu karticu, a nakon nje drugu;

3) izvučemo prvu karticu, vratimo je u snop i zatim izvučemo drugu?

21. U šest kutija na slučajan se način raspoređuju četiri kuglice. Kolika je vjerojatnost da će u prve četiri kutije biti točno po jedna kuglica?

22. Netko je zaboravio tri posljednje znamenke telefonskog broja i sjeća se samo da su sve tri različite a posljednja paran broj. Kolika je vjerojatnost da će slučajnim izborom pogoditi pravi broj?

23. Kolika je vjerojatnost da se u igri LOTO 6 od 45 u jednoj kombinaciji postigne dobitak od 6, 5, 4 ili 3 pogotka?

24. U kutiji se nalazi 5 crvenih i 4 bijele kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo birajući na sreću 6 kuglica izvući 3 crvene i 3 bijele?

25. U snopu od 52 karte postoji po 13 karata sljedećih boja: pik, karo, herc i tref. Kolika je vjerojatnost da će u 13 karata koje dobiva pojedini igrač biti 5 pikova, 3 herca, 2 kare i 3 trefa?

— ◆ —

26. Bačene su četiri kocke. Kolika je vjerojatnost da sve četiri padnu na isti broj?

27. Slova riječi MATEMATIKA napisana su na kartice i potom promiješana. Kolika je vjerojatnost da će se, otkrivajući jednu po jednu četiri kartice, pojaviti riječ MATE? A kolika za riječ TIKA?

28. Dijete slaže na sreću jednu do druge kockice na kojima su ispisana slova A, A, A, N, N, S. Kolika je vjerojatnost da će dobiti riječ ANANAS?

29. Dijete se igra s karticama na kojima su napisana slova A, E, E, J, J, N, N, O, O, R, T, V. Kolika je vjerojatnost da će, redajući ih na sreću, složiti riječ NEVJEROJATNO?

30. Odredi vjerojatnost da su znamenke nasumično odabranog peteroznamenkastog broja

1) sve različite;

2) sve parne;

3) parne i različite.

31. Kolika je vjerojatnost da su svi učenici nekog razreda, a ima ih 36, rođeni na razne dane u godini?

32. U kutiji imamo 15 kuglica od kojih je 5 crvenih. Ako slučajno izvučemo 5 kuglica, kolika je vjerojatnost da će među njima biti točno 4 crvene?

33. Na stranici `http://hr.wikipedia.org/wiki/Dobitne_kombinacije_u_pokeru` možete pročitati kako se određuje jakost karata u pokeru. Na početku igre, pet karata dijeli se na sreću iz snopa od 52 karte. Kolika je vjerojatnost da će među njima biti:

1) skala u boji

2) poker

3) ful

4) boja (koja nije skala)

5) skala (koja nije u boji)

6) tris

7) dva para

8) jedan par?

34. Neka su A, B, C događaji. Iskaži s pomoću unije i presjeka ovih događaja sljedeće događaje:

1) ostvario se samo događaj A;

2) ostvarili su se A i B, ali ne C;

3) ostvarila su se sva tri događaja;

4) ostvario se barem jedan događaj;

5) ostvario se točno jedan događaj;

6) nije se ostvario nijedan događaj.

35. Ako je $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.8$, izračunaj vjerojatnost događaja $\overline{A}$, $\overline{B}$, AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$.

36. Ako je $P(A \cup B) = 0.8$, $P(AB) = 0.2$, $P(\overline{A}) = 0.6$, kolika je vjerojatnost događaja A, B, $A\overline{B}$?

37. Kolika je vjerojatnost da se pri bacanju dviju kocaka pojavi barem jedna jedinica?

38. Kolika je vjerojatnost da se pri bacanju dviju kocaka pojavi **1)** zbroj 8; **2)** zbroj 9; **3)** zbroj veći od 9; **4)** broj djeljiv s 2 ili djeljiv s 3.

39. Novčić se baca četiri puta. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:

1) pojavilo se točno jedno pismo;

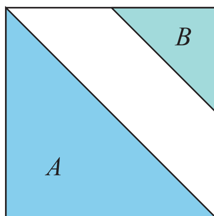
2) u drugom bacanju pojavilo se pismo;

3) pojavilo se barem jedno pismo;

4) pismo se pojavilo barem dvaput?

3.3. Geometrijska vjerojatnost

Zamislimo pokus u kojem biramo na slučajan način točku unutar kvadrata Ω sa stranicom duljine a. Istaknimo neke podskupove tog kvadrata. Neka je A polovina kvadrata ispod dijagonale. Neka je B trokut dobiven spajanjem polovišta susjednih stranica.



Geometrijska vjerojatnost: mjera podskupa određuje njegovu vjerojatnost.

Biramo li točku unutar kvadrata, možemo se upitati kolika je vjerojatnost da će ta točka biti izabrana unutar nekih od ovih podskupova. U ovdje opisanom pokusu prirodno je sljedećim događajima pridružiti vjerojatnosti:

$$P(A) = P\{\text{točka je pala u skup } A\} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a^2} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P\{\text{točka je pala u skup } B\} = \frac{\frac{1}{8}a^2}{a^2} = \frac{1}{8}.$$

Te smo vjerojatnosti dobili promatrajući *omjer površina* podskupova i čitava kvadrata.

Geometrijska vjerojatnost

Neka je Ω ograničeni podskup ravnine i $m(\Omega)$ njegova površina, a A podskup od Ω. Kažemo da biramo točku **na sreću** unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar podskupa A jednaka

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \tag{1}$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo **geometrijska vjerojatnost**.

Formulom (1) uistinu je definirana vjerojatnost. Provjerimo jesu li ispunjena temeljna svojstva vjerojatnosti.

1°. U geometrijskoj vjerojatnosti nemoguć događaj je izbor točke unutar praznog skupa. Površina praznog skupa je 0, pa je:

$$P(\emptyset) = \frac{m(\emptyset)}{m(\Omega)} = 0, \qquad P(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{m(\Omega)} = 1.$$

2°. Ako su A i B podskupovi od Ω takvi da je $A \subset B$, onda je $m(A) \leqslant m(B)$. Zato:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \leqslant \frac{m(B)}{m(\Omega)} = P(B).$$

3°. Ako su A i B disjunktni podskupovi od Ω, onda je površina njihove unije jednaka zbroju površina pojedinih skupova. Zato je vjerojatnost da točka bude izabrana unutar jednog od podskupova jednaka:

$$P(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{m(\Omega)} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} + \frac{m(B)}{m(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

Primjer 1.

Biramo na sreću točku unutar kvadrata Ω sa stranicom duljine a. Kolika je vjerojatnost da ona padne unutar kruga upisanog u taj kvadrat?

Neka je A traženi događaj. Površina kruga je:

$$m(A) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi,$$

pa je odgovarajuća vjerojatnost:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}a^2\pi}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Primjer 2.

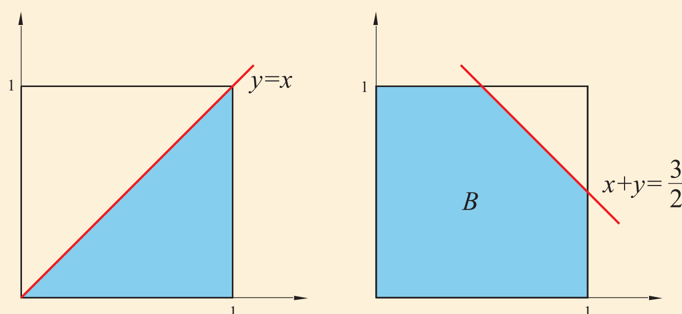
Unutar intervala $[0,1]$ biraju se na sreću dva broja x i y. Odredi vjerojatnost događaja:

1) $A = \{x > y\}$; **2)** $B = \{x + y < \frac{3}{2}\}$.

Izbor dvaju brojeva x i y unutar intervala $[0,1]$ odgovara izboru jedne točke (x,y) unutar jediničnog kvadrata $[0,1] \times [0,1]$. Označimo taj kvadrat s Ω (slika). On predstavlja skup elementarnih događaja. Da bismo odredili tražene vjerojatnosti, moramo izračunati površinu podskupova od Ω koji odgovaraju tim događajima.

1) Događaju A odgovara istoimeni podskup: skup svih točaka jediničnog kvadrata za koje je $x > y$. Tad vrijedi:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$



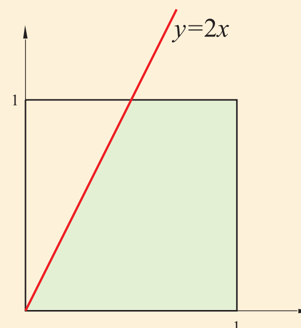
Izbor dviju točaka unutar intervala $[0,1]$ odgovara izboru jedne točke unutar jediničnog kvadrata.

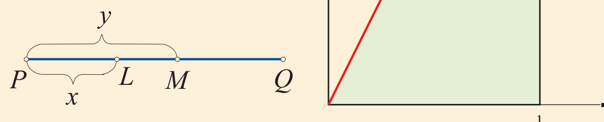
2) Sad je $B = \{(x,y) : x + y < \frac{3}{2}\}$, te imamo:

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1} = \frac{7}{8}.$$

Primjer 3.

Na dužini $\overline{PQ}$ duljine 1 na sreću se biraju dvije točke L i M. Odredi vjerojatnost da je točka L bliža točki M nego točki P.



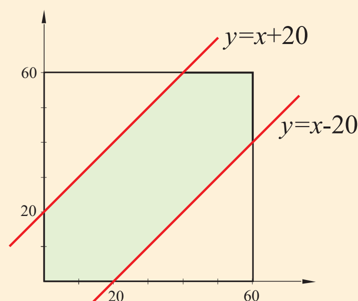


Označimo $x = d(P,L)$, $y = d(P,M)$. Tad vrijedi: $d(L,M) = |y-x|$. Traženom događaju odgovara skup svih točaka (x,y) za koje je $|y-x| < x$, odnosno: $-x < y-x < x \iff 0 < y < 2x$. Taj je skup naznačen na slici.

$$P\{d(L,M) < d(P,L)\} = P\{|y-x| < x\}$$
$$= P\{0 < y < 2x\} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

Primjer 4.

Dva prijatelja izlaze uvečer jedan neovisno o drugome u na sreću odabranom trenutku između 20 i 21 sat. Po dolasku na gradski trg zadržavaju se na tom mjestu 20 minuta, ali najkasnije do 21 sat, kad odlaze u kino. Kolika je vjerojatnost da će se oni sresti na trgu?



Ako je x trenutak dolaska prvog, a y trenutak dolaska drugog prijatelja na trg, oni će se sresti ako je $|y-x| < 20$ (vrijeme mjerimo u minutama). Brojevi x i y su na sreću odabrani unutar intervala $[0,60]$. Zato je

$$P\{|x-y| < 20\} =$$
$$= P\{-20 < y-x < 20\}$$
$$= P\{x-20 < y < x+20\} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{60^2-40^2}{60^2} = 0.56\,.$$

Zadatci 3.3.

1. Broj se bira na sreću unutar intervala $[0,1]$. Kolika je vjerojatnost da će prva znamenka u njegovom decimalnom prikazu biti veća od 6?

2. Broj se bira na sreću unutar intervala $[0,1]$. Kolika je vjerojatnost da će druga znamenka u njegovom decimalnom prikazu biti veća od 6?

3. Dva broja biraju se na sreću unutar intervala $[0,1]$. Kolika je vjerojatnost da je njihov zbroj veći od $\frac{3}{2}$?

4. Brojevi x i y biraju se na sreću unutar intervala $[0,2]$. Kolika je vjerojatnost događaja

1) $y < x+1$,

2) $|y-x| > 1$,

3) $x+y > 1$?

5. Dvije točke M i N biraju se na sreću unutar dužine $\overline{AB}$ duljine a. Izračunaj vjerojatnost događaja:

1) Točka M bliža je rubu A nego točka N.

2) Točke M i N bliže su rubu A nego rubu B.

3) Točka M bliža je rubu A, a točka N rubu B.

6. Dvije točke biraju se na sreću unutar dužine duljine a. Kolika je vjerojatnost da je njihova udaljenost manja od $\frac{a}{3}$?

7. Dva broda moraju stići u isto pristanište. Vremena dolaska brodova su nezavisna i jednako vjerojatna u toku dana. Odredi vjerojatnost da će jedan od brodova morati čekati na oslobađanje pristaništa ako je vrijeme zadržavanja prvog broda u pristaništu 1 sat, a drugog 2 sata.

— ◆ —

8. Točka T bira se na sreću unutar kvadrata $ABCD$ stranice $a=3$. Izračunaj vjerojatnost događaja:

1) Udaljenost točke do središta kvadrata manja je od 1;

2) Udaljenost točke do ruba kvadrata manja je od 1;

3) Udaljenost točke do dijagonale $\overline{AC}$ manja je od 1;

4) Točka T bliža je vrhu A nego ostalim vrhovima.

9. Kolika je vjerojatnost da točka na sreću odabrana unutar jednakostraničnog trokuta stranice a padne unutar kruga upisanog u taj trokut?

10. U jednakokračnom trokutu osnovice a i visine a upisan je kvadrat. Kolika je vjerojatnost da na sreću odabrana točka u trokutu ne leži unutar tog kvadrata?

11. Na kvadratično ispletenu mrežicu pada s velike visine metalna kuglica, okomito na mrežicu. Ako je stranica kvadrata mrežice duga 10 mm, a promjer kuglice 5 mm, kolika je vjerojatnost da će kuglica proći kroz mrežicu, a da ne dotakne njezine niti?

12. Na ravninu na kojoj su istaknute točke s cjelobrojnim koordinatama bačen je novčić promjera 0.5 jedinica. Kolika je vjerojatnost da novčić neće pokriti nijednu istaknutu točku?

13. Kovani novčić polumjera R bačen je na pod pokriven pločicama oblika pravilnog šesterokuta stranice $a=5R$. Kolika je vjerojatnost da novčić ne presječe niti jednu od stranica šesterokuta?

— ◆ —

14. Dvije točke biraju se na sreću na obodu kruga polumjera r. Kolika je vjerojatnost da će njihova udaljenost biti veća od r?

15. Kolika je vjerojatnost da će udaljenost točaka u prethodnom zadatku biti manja od $r\sqrt{3}$? Kolika je vjerojatnost da ta udaljenost nije veća od $r\sqrt{2}$?

3.4. Uvjetna vjerojatnost. Nezavisnost

Pri bacanju kocke, vjerojatnost da se pojavi broj 1 jednaka je $\frac{1}{6}$. Nakon bacanja mi sa sigurnošću znamo je li se taj događaj realizirao ili nije. Pretpostavimo međutim da je netko pogledao na kocku koju mi ne vidimo i kazao nam: kocka je pala na neparan broj. Kolika je sad vjerojatnost da je ona pala na broj 1? Očito, ta se vjerojatnost promijenila. Kako su nam preostale samo tri mogućnosti, brojevi 1, 3 i 5, ta je vjerojatnost sad $\frac{1}{3}$.



Evo još jednog primjera.

Bacamo dvije kocke. Neka je:

$$A = \{\text{na prvoj kocki pao je broj } 2\},$$
$$B = \{\text{zbroj brojeva na objema kockama je } 6\}.$$

Od 36 elementarnih događaja, događajima A i B pripadaju sljedeći

$$A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\},$$
$$B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

Zato je:

$$P(A) = \frac{6}{36}, \qquad P(B) = \frac{5}{36}.$$

Kolika je vjerojatnost događaja A ako je poznato da se realizirao događaj B? U tom je slučaju dovoljno samo promotriti elementarne događaje koji sačinjavaju B (jer samo neki od njih dolazi u obzir) i među njima tražiti one povoljne za događaj A — time tražimo elementarne događaje za umnožak AB tih događaja. Ovakvu vjerojatnost nazivamo **uvjetna vjerojatnost**, bilježimo je simbolom $P(A \mid B)$ (i čitamo: vjerojatnost od A uz uvjet B). Imamo:

$$P(A \mid B) = \frac{1}{5}$$

jer je samo događaj $(2,4)$ povoljan za A.

Na isti način, $P(B \mid A) = \frac{1}{6}$, jer je među svim elementarnim događajima koji sačinjavaju A samo $(2,4)$ povoljan za B.

Definicija uvjetne vjerojatnosti

Da bismo došli do općenite formule za uvjetnu vjerojatnost, primijetimo da broj-nik 1 označava broj elementarnih događaja koji su povoljni i za događaj A i za događaj B. Naime, vrijedi $AB = \{(2,4)\}$. Stoga ovu vjerojatnost možemo pisati i u obliku:

$$P(A \mid B) = \frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

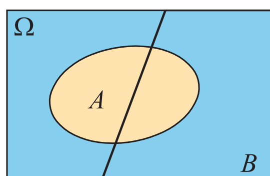
Ovo razmatranje ukazuje na opravdanost sljedeće definicije.

Uvjetna vjerojatnost

Uvjetna vjerojatnost događaja A, ako je poznato da se ostvario događaj B takav da je $P(B) > 0$, broj $P(A \mid B)$ je definiran s:

$$P(A \mid B) := \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1)$$

Primjer 1.



Od 120 učenika četvrtih razreda, 40 pohađa dodatne pripreme iz matematike, 30 iz engleskog, a 20 iz oba predmeta. Izračunajmo vjerojatnosti sljedećih događaja

1) Na sreću odabrani učenik pohađa pripreme iz matematike.

2) Na sreću odabrani učenik pohađa pripreme iz engleskog.

3) Na sreću odabrani učenik među onima koji pohađaju matematiku, pohađa i engleski.

4) Na sreću odabrani učenik među onima koji pohađaju engleski, pohađa i matematiku.

5) Na sreću odabrani učenik među onima koji pohađaju engleski, ne pohađa matematiku.

▶ Slika lijevo ilustrira ovu situaciju. Neka M označava da učenik pohađa pripreme iz matematike, a E engleskog.

1) i **2)** Ovdje je riječ o "običnim" vjerojatnostima,

$$P(M) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}, \qquad P(E) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}.$$

3) i **4)** Ovdje je riječ o uvjetnoj vjerojatnosti, $P(E \mid M)$. Računajući prema definiciji, imamo

$$P(E \mid M) = \frac{P(E \cap M)}{PM} = \frac{\frac{20}{120}}{\frac{40}{120}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

No jednostavnije je računati ovako. Promatramo samo one učenike koji pohađaju matematiku, i među njima izdvojimo one koji pohađaju i engleski:

$$P(E \mid M) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

Na isti način,

$$P(M \mid E) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Vidimo da uvjetne vjerojatnosti $P(E \mid M)$ i $P(M \mid E)$ općenito nisu jednake.

5) Sada je
$$P(\overline{M} \mid E) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$
Vidimo da je $P(\overline{M} \mid E) = 1 - P(M \mid E)$.

Zadatak 1. Bačene su dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da se pojavio broj 6 ako je poznato da je zbroj brojeva jednak 8 ?

Ako je zbroj brojeva na objema kockama jednak 8, kolika je vjerojatnost da se pojavio broj 6?

Računanje vjerojatnosti umnoška dvaju događaja

Definicijsku formulu (1) za račun uvjetne vjerojatnosti možemo napisati ovako
$$P(AB) = P(B)P(A \mid B) \qquad (2)$$
Ova se formula koristi u računanju vjerojatnosti umnoška dvaju događaja. Naime, uvjetna se vjerojatnost, za razliku od vjerojatnosti umnoška, lagano računa.

Ako zamijenimo događaje A i B (koji oboje imaju pozitivnu vjerojatnost), dobit ćemo istovrsnu formulu
$$P(AB) = P(A)P(B \mid A). \qquad (3)$$

Primjer 2. U žari se nalazi šest bijelih i četiri crne kuglice. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije kuglice koje izvučemo biti bijele?

Možemo zamisliti da kuglice izvlačimo jednu po jednu. Neka su A i B događaji
$$A = \{\text{prva kuglica je bijela}\},$$
$$B = \{\text{druga kuglica je bijela}\}.$$
Tad je AB događaj čiju vjerojatnost tražimo. Očito je:
$$P(A) = \frac{6}{10}.$$
Nakon što izvučemo prvu kuglicu, u žari je preostalo devet kuglica, od kojih je pet bijelih. Stoga je:
$$P(B \mid A) = \frac{5}{9}$$
i po formuli (3) slijedi:
$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

Na sličan ćemo način računati i vjerojatnost umnoška više događaja. Primjerice

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB).$$

Moguće su i druge kombinacije događaja s desne strane.

Primjer 3. Kolika je vjerojatnost da tri na sreću odabrane karte iz snopa od 52 karte budu tref boje?

Označimo s A traženi događaj i neka je $A_i = \{i\text{-ta karta je tref boje}\}$, $i = 1, 2, 3$. Tad je $A = A_1A_2A_3$ i računamo vjerojatnost po formuli:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2).$$

Pojedine vjerojatnosti su $P(A_1) = \dfrac{13}{52}$, u snopu ima 13 karata tref boje, $P(A_2 \mid A_1) = \dfrac{12}{51}$, nakon što je prva izvučena, preostalo ih je 51 od kojih je 12 tref boje, $P(A_3 \mid A_1A_2) = \dfrac{11}{50}$. Dakle,

$$P(A) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = 0.013.$$

Zadatak 2. 6 bijelih, 4 crne i 2 plave kuglice izabiru se jedna za drugom na sreću. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije biti bijele?

Nezavisnost događaja

Promotrimo sljedeću inačicu jednog od prethodnih primjera.

Primjer 4. U žari se nalazi šest bijelih i četiri crne kuglice. Izvlačimo dvije kuglice, jednu po jednu. Kolika je vjerojatnost da će druga kuglica biti bijela ako je prva kuglica bila bijela. Kolika je ta vjerojatnost ako je prva kuglica bila crna? Izračunajmo obje ove vjerojatnosti u sljedeće dvije situacije:

1) prva se kuglica nakon izvlačenja ne vraća u žaru,

2) prva se kuglica nakon izvlačenja vraća u žaru.

Označimo s A i B događaje

$$A = \{\text{prva kuglica je bijela}\},$$
$$B = \{\text{druga kuglica je bijela}\}.$$

Tražimo uvjetne vjerojatnosti $P(B \mid A)$ i $P(B \mid \overline{A})$. Očito je

$$P(A) = \frac{6}{10}, \qquad P(\overline{A}) = \frac{4}{10}.$$

1) Nakon izvlačenja prve kuglice, u žari imamo jednu kuglicu manje. Zato je

$$P(B \mid A) = \frac{5}{9}, \qquad P(B \mid \overline{A}) = \frac{6}{9}.$$

2) Ako kuglicu nakon izvlačenja vratimo u žaru, prije izvlačenja druge kuglice imat ćemo identičnu situaciju: šest bijelih i četiri crne kuglice, bez obzira je li se ostvario događaj A ili nije:

$$P(B \mid A) = \frac{6}{10}, \qquad P(B \mid \overline{A}) = \frac{6}{10}$$

Kažemo da *realizacija događaja A ne utječe na vjerojatnost realizacije događaja B*.



Neka događaji A i B imaju pozitivnu vjerojatnost.

Neka je $P(B \mid A) = P(B)$, tj. vjerojatnost događaja B ne mijenja se nakon što nam je poznato da se realizirao događaj A. Tad kažemo da su A i B **nezavisni događaji**.

U tom slučaju vrijedi

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(A)P(B).$$

Ako je pak ispunjena ova jednakost, onda za uvjetnu vrijedi

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Isto tako, bit će

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Ovdje zahtjevamo da oba događaja imaju pozitivne vjerojatnosti: $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$.

Definicija i kriterij nezavisnosti događaja

Događaji A i B **nezavisni** su ako vrijedi

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{ili} \quad P(B \mid A) = P(B).$$

Nužan i dovoljan uvjet za nezavisnost jest da bude:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{4}$$

Primjer 5.

Ako su događaji A i B nezavisni, tad nije posve očito da su nezavisni i njihovi komplementi $\overline{A}$ i $\overline{B}$. Pokažimo to koristeći ovaj kriterij nezavisnosti.

$$\begin{aligned}
P(\overline{A})P(\overline{B}) &= (1-P(A))(1-P(B)) \\
&= 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B) && \text{(nezavisnost od } A \text{ i } B\text{)} \\
&= 1-P(A)-P(B)+P(AB) && \text{(vjerojatnost unije događaja)} \\
&= 1-P(A\cup B) && \text{(vjerojatnost komplementa)} \\
&= P(\overline{A\cup B}) && \text{(de Morganov zakon)} \\
&= P(\overline{A}\,\overline{B})
\end{aligned}$$

Dobili smo $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$ pa su $\overline{A}$ i $\overline{B}$ nezavisni.

Primjer 6.

Bacamo dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da broj na prvoj bude paran, a na drugoj manji od 3?

Rezultat na jednoj kocki nezavisan je od toga što će se pojaviti na drugoj kocki. Vjerojatnost pojave parnog broja na prvoj kocki je $\frac{1}{2}$, vjerojatnost da broj na drugoj bude manji od 3 je $\frac{1}{3}$. Traženi događaj produkt je ovih dvaju. Stoga je njegova vjerojatnost $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Nezavisnost skupine događaja definira se na složeniji način. Tako primjerice, ako su A, B i C po volji odabrani događaji, onda imamo

$$P(ABC) = P(A)\cdot P(B \mid A)\cdot P(C \mid AB).$$

Nezavisnost triju događaja znači da će sve uvjetne vjerojatnosti u kojima se ti događaji javljaju biti jednake bezuvjetnima. Primjerice: $P(B \mid A) = P(B)$, $P(C \mid AB) = P(C)$ i slično za druge moguće kombinacije. Tako za nezavisne događaje A, B i C vrijedi

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

Slično vrijedi i za više od tri događaja. Ako su $A_1, \ldots, A_n$ nezavisni, onda je:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

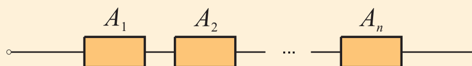
Zadatak 3. U žari se nalaze 4 plave, 5 bijelih i 6 crnih kuglica. Na sreću odaberi 3 kuglice. Označi događaje

$A =$ sve su tri kuglice različitih boja,
$B =$ prva kuglica je bijela.

Izračunaj $P(A)$ i $P(B)$. Dokaži da su događaji A i B nezavisni.

Primjer 7.

Serijski spoj. Proizvodnja nekog proizvoda organizirana je na traci koja se sastoji od n dijelova, od kojih svaki radi neovisno o ostalima. Ako barem jedan od dijelova prestane s radom, prestaje i cjelina:



Vjerojatnost da j-ti dio neće otkazati tijekom dana jednaka je r_j. Kolika je vjerojatnost da će čitava traka raditi ispravno u tom danu?

Označimo s A_j događaj

$$A_j = \{j\text{-ti dio je ispravan}\}$$

i neka je

$$A = \{\text{čitava traka je ispravna}\}.$$

Događaj A ostvarit će se ako se ostvare svi događaji $A_1, \ldots, A_n$. Dakle,

$$A = A_1 A_2 \ldots A_n.$$

Zbog nezavisnosti

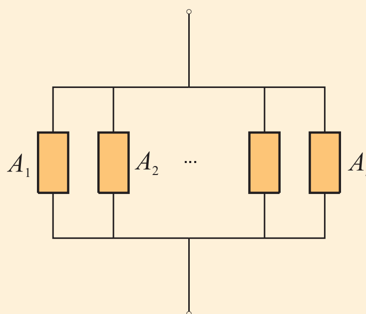
$$P(A) = P(A_1) \ldots P(A_n) = r_1 \ldots r_n.$$

Primjerice, za $n = 5$ i $r_1 = \ldots = r_5 = 0.9$ dobivamo $P(A) = 0.9^n = 0.59$.

Vjerojatnost ispravnog rada serijski spojenog sklopa brzo opada s brojem elemenata u sklopu.

Primjer 8.

Paralelni spoj. Uz iste oznake kao i prije, izračunajmo vjerojatnost ispravnog rada za proces proizvodnje u kojem se na nekoliko mjesta obavlja istovrsna radnja.



Sad će se proces odvijati ako je ispravan bar jedan njegov dio. Zato je

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Vjerojatnost ove unije nije lako direktno izračunati.

Promotrimo suprotan događaj $\overline{A}$: proizvodnja je prestala. Očigledno, on će se ostvariti ako su u kvaru svi elementi, tj. ako se ostvare svi događaji $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$. Po de Morganovim zakonima vrijedi

$$\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$$

Događaji $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$ također su nezavisni. Zato je

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) \ldots P(\overline{A}_n),$$

tj.

$$1 - P(A) = (1 - P(A_1)) \ldots (1 - P(A_n)),$$
$$P(A) = 1 - (1 - r_1) \ldots (1 - r_n).$$

S vrijednostima iz prošlog primjera imali bismo $P(A) = 1 - 0.1^5 \approx 1$. Paralelnim organiziranjem procesa postiže se velika pouzdanost ispravnog rada.

Ponavljanje pokusa

Pretpostavimo da neki pokus možemo ponavljati n puta, pod istim uvjetima. S takvim pokusima smo se već susretali, bacanje novčića ili kocke tipičan su primjer pokusa koji se ponavlja pod istim uvjetima.

Neka je p vjerojatnost da se u jednom pokusu pojavi događaj A:

$$P(A) = p.$$

Neka nam $+$ označava da se A pojavio u nekom pokusu, $-$ kad to nije slučaj. Tad rezultate pojavljivanja događaja A u svih n pokusa možemo predočiti nizom od n znakova $+$ ili $-$.

Primjer 9. Kocku bacamo osam puta. Kolika je vjerojatnost da se šestica pojavi tri puta?

Ovaj će se događaj ostvariti ako se ostvari niz poput sljedećeg:

$$+, -, -, -, +, +, -, -$$

kad se šestica pojavila u prvom, petom i šestom pokusu.

Rezultati u svakom bacanju kocke nezavisni su događaji. Zato je vjerojatnost da se točno ovaj niz ostvari jednaka

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

No, ovo će biti vjerojatnost pojavljivanja i za bilo koji drugi niz u kojem se šestica pojavljuje točno tri puta. Svi su ti nizovi povoljni za promatrani događaj.

Koliko ih ima? Onoliko na koliko načina možemo izabrati tri znaka $+$ od osam mogućih mjesta, dakle

$$C_8^3=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}.$$

Umjesto kombinacija, možemo zamisliti da je riječ o permutacijama niza od tri znaka $+$ i pet znakova $-$. Broj tih permutacija je

$$P_8^{5,3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}.$$

Zato je vjerojatnost da će se šestica pojaviti tri puta jednaka

$$\binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5=0.104.$$

Opišimo općenitu situaciju. Označimo s p_k vjerojatnost da se u n događaja A pojavio k puta. Jedan mogući povoljni ishod je niz poput sljedećeg

$$\underbrace{+,+,\ldots+}_{k\ \text{puta}},\underbrace{-,-,\ldots,-}_{n-k\ \text{puta}}$$

Vjerojatnost pojavljivanja ovog niza, i *bilo kojeg drugog* niza u kojem se pojavljuje k znakova $+$ je

$$p^k\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Različitih nizova duljine n u kojima se A pojavljuje točno k puta ima

$$C_n^k=\binom{n}{k}.$$

Prema tome, možemo zaključiti sljedeće:

Vjerojatnost realizacije događaja pri ponavljanju pokusa

Ako je p vjerojatnost da se događaj A pojavi u svakom pokusu, onda je vjerojatnost da će se on ostvariti k puta pri ponavljanju n nezavisnih pokusa jednaka

$$p_k=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (5)$$

Primjer 10.

Bacamo četiri kocke. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:

$A = \{$šestica se pojavila točno tri puta$\}$,
$B = \{$broj veći od četiri pojavio se točno dva puta$\}$,
$C = \{$parni broj pojavio se barem tri puta$\}$.

Ovdje se radi o ponavljanju pokusa (bacanje jedne kocke), pod istim uvjetima. Naime, pokus bacanja četiriju kocaka ekvivalentan je pokusu u kojem se jedna kocka baca četiri puta.

Vjerojatnost realizacije događaja A u jednom bacanju je $p = \frac{1}{6}$. Prema (5), vjerojatnost da će se on u četiri pokusa ostvariti tri puta iznosi

$$P(A) = p_3 = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 0.015 .$$

Vjerojatnost da se u jednom bacanju pojavi broj veći od 4 je $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Zato je vjerojatnost događaja B jednaka

$$P(B) = p_2 = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.296 .$$

Vjerojatnost da se u jednom bacanju pojavi parni broj je $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Vjerojatnost da se u četirima bacanjima taj događaj ostvari tri ili četiri puta iznosi

$$P(C) = p_3 + p_4 = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16} = 0.313 .$$

Primjer 11.

Što je vjerojatnije u igri s ravnopravnim protivnikom: dobiti dvije igre od tri ili tri igre od šest? (Igra nema neriješenog ishoda.)

Vjerojatnost dobitka jedne igre je $\frac{1}{2}$. Vjerojatnost da se dobiju dvije igre od tri iznosi:

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Vjerojatnost dobitka triju igara od ukupno šest je:

$$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}.$$

Vjerojatniji je prvi ishod!

Primjer 12. Novčić bacamo osam puta. Izračunaj vjerojatnosti za broj mogućih pojavljivanja pisma. Kolika je vjerojatnost da će se pismo pojaviti barem pet puta?

▶ U svakom bacanju ta je vjerojatnost $\frac{1}{2}$. Vjerojatnost da se pismo pojavi k puta u osam bacanja iznosi

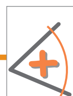
$$p_k = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{8-k} = \frac{1}{2^8}\binom{8}{k}.$$

Uvrštavajući $k = 0, 1, \ldots, 8$, dobit ćemo sljedeće vjerojatnosti

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Odgovor na posljednje pitanje je:

$$\frac{56}{216} + \frac{28}{216} + \frac{8}{216} + \frac{1}{256} = \frac{93}{256}.$$



Kutak plus

CHEVALIER DE MÉRÉ

Chevalier de Méré je bio, s današnjeg gledišta, bonvivan. Beskrajni sati koje je proveo za kockarskim stolom imali su ipak velike zasluge za razvitak teorije vjerojatnosti. Svi kockari imaju (teško plaćeno) iskustvo o vjerojatnostima nekih ishoda.

Vjerojatnost da se pri bacanju jedne kocke pojavi broj 1 šest je puta vjerojatnija od događaja da se pri bacanju dviju kocaka pojave dvije jedinice. Zato je de Méré smatrao da su sljedeći događaji jednako vjerojatni:

$A = \{$ u četirima bacanjima jedne kocke pojavila se barem jednom jedinica $\}$,

$B = \{$ u 24 bacanja dviju kocaka pojavile su se barem jednom dvije jedinice $\}$.

Kad se dva igrača klade na ishode ovih događaja, imaju otprilike jednake šanse dobitka. To je de Méré i činio. Na taj je način primijetio da kad se kladi u korist događaja A, tada je *na dugu ruku* na dobitku, a kad se kladi na događaj B, onda je u gubitku.

Ne znajući objasniti razlog tome, pisao je godine 1654. matematičkim autoritetima svoga doba. U živoj raspravi koja je uslijedila začela se nova teorija. *Il est tres bon ésprit, mais quel dommage, il n'est pas geometre*, napisao je za de Méréa Pascal u pismu Fermatu. ("Dobar je momak, šteta što nije matematičar.")

1. Izračunajte vjerojatnost događaja A i B.

2. Ustvrdili ste da je događaj A vjerojatniji. Ako se oba pokusa ponavljaju 100 puta, kolika je vjerojatnost da će se A ostvariti više puta nego B?

Zadatci 3.4.

1. Kocka je bačena dvaput. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:
1) prvi put je pao broj 3, a drugi put broj 6;
2) pojavili su se brojevi 3 i 6?

2. Bačene su dvije kocke, crvena i plava. Kolike su vjerojatnosti sljedećih događaja:
1) plava je pala na 3 ako je zbroj brojeva 5;
2) pojavio se broj 3 na nekoj kocki ako je zbroj brojeva 5;
3) zbroj brojeva je 5 ako je plava pala na broj 3;
4) zbroj brojeva je 5 ako je neka kocka pala na broj 3;
5) zbroj brojeva je 4 ako je poznato da plava nije pala na broj 1;
6) plava je pala na 3 ako je poznato da je crvena pala na 4;
7) plava nije pala na 3 ako je poznato da se pojavio broj 4?

3. Dva su igrača bacila kocku i prvi je igrač dobio veći broj od drugog igrača. Kolika je vjerojatnost da je taj broj jednak 6?

4. Ako su dvije kocke pale na različite brojeve, kolika je vjerojatnost da je zbroj tih brojeva veći od 8?

5. Bačene su dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da je pala barem jedna šestica ako je poznato da su pala dva različita broja?

6. Ispravan novčić baca se 10 puta. Kolika je vjerojatnost da će svih deset puta pasti pismo ako je poznato da je pismo palo prvih devet puta?

7. 6 bijelih, 4 crne i 2 plave kuglice izabiru se jedna za drugom na sreću. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije biti bijele?

8. Istovremeno se bacaju novčić i kocka. Kolika je vjerojatnost događaja
$A = \{$ pojavili su se pismo i šestica $\}$,
$B = \{$ pojavili su se pismo ili šestica $\}$,
$C = \{$ na kocki se pojavio broj veći od 4 $\}$?

9. Pokus se sastoji u bacanju dviju kocaka. Promatraju se događaji:
$A = \{$ pojavila se bar jedna šestica $\}$,
$B = \{$ pojavila se bar jedna dvojka $\}$,
$C = \{$ pojavio se jedan paran i jedan neparan broj $\}$.
1) Odredi uvjetnu vjerojatnost $P(B|C)$.
2) Ispitaj jesu li događaji A i B nezavisni.

10. Bačene su dvije kocke. Označimo događaje:
$A = \{$ pojavila se barem jedna jedinica $\}$,
$B = \{$ pojavila su se dva različita broja $\}$.
1) Izračunaj $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$.
2) Jesu li događaji A i B nezavisni?

— ◆ —

11. Vjerojatnosti pojavljivanja triju nezavisnih događaja su $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$. Kolika je vjerojatnost da se ostvari barem jedan od njih?

12. Vjerojatnosti pojavljivanja triju nezavisnih događaja su $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$. Kolika je vjerojatnost da se ostvari točno jedan od njih?

13. U jednoj kutiji nalaze se 2 bijele i 3 crvene kuglice. Izvlačimo na sreću dvije kuglice iz te kutije.
1) Kolika je vjerojatnost da smo izvukli jednu bijelu i jednu crvenu kuglicu?
2) Ako je prva izvučena kuglica bijela, kolika je vjerojatnost da je druga po redu izvučena kuglica crvena?
3) Ako je jedna od kuglica bijela, kolika je vjerojatnost da je druga kuglica crvena?

14. Ako kocku bacimo tri puta zaredom, kolika je vjerojatnost da će se dobiti tri različita broja?

15. Vjerojatnosti pogotka u metu za svakog od triju strijelaca su redom 0.8, 0.6, 0.5. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena točno jednom?

16. Vjerojatnosti pogotka u metu za svakog od četiriju strijelaca su redom 0.8, 0.7, 0.6, 0.5. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena točno dvaput?

— ◆ —

17. Dva strijelca gađaju u istu metu. Vjerojatnosti njihovih pogodaka su 0.4 i 0.8. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena? Ako je pogođena točno jednim metkom, kolika je vjerojatnost da je pogodio drugi strijelac?

18. Andro, Branko i Cvjetan gađaju metu s po jednim metkom. Vjerojatnost pogotka za Andru je 60 %, za Branka 70 % a za Cvjetana 80 %. Ako je meta pogođena jednim pogotkom, kolika je vjerojatnost da je pogodio Andro?

19. Bačene su tri kocke, crvena, bijela i plava. Zbroj okrenutih brojeva je 13. Kolika je vjerojatnost da je bijela kocka pala na broj 4?

20. Bacamo tri kocke. **1)** Kolika je vjerojatnost da se pojavi barem jedna šestica? **2)** Kolika je vjerojatnost da se šestica pojavi točno dva puta?

— ◆ —

21. Strijelac gađa metu dok je ne pogodi. Vjerojatnost pogotka u svakom gađanju je 0.6. Izračunaj vjerojatnost sljedećih događaja:
1) meta je pogođena u trećem pokušaju;
2) meta je pogođena u prva tri pokušaja;
3) meta je pogođena nakon četvrtog pokušaja.

22. Novčić bacaš dok se ne pojavi pismo. Kolika je vjerojatnost događaja:
1) pismo se pojavilo u prva 3 bacanja;
2) pismo se nije pojavilo u prvih 50 bacanja.

23. Kocku bacaš dok se šestica ne pojavi dva puta. Kolika je vjerojatnost događaja
$A = \{$ pokus se završio u prva tri bacanja $\}$,
$B = \{$ pokus se nije završio u prvih pet bacanja $\}$?

24. Kolika je vjerojatnost da ćeš bacajući kocku broj 5 dobiti po prvi put
1) u drugom pokušaju;
2) u trećem pokušaju;
3) u šestom pokušaju?

25. Novčić se baca dok se isti znak ne pojavi dva puta za redom. Kolika je vjerojatnost da će pokus završiti u prvih 5 bacanja?

— ◆ —

26. Novčić se baca tri puta. Koji je događaj vjerojatniji:
$A = \{$sva tri puta palo je pismo$\}$, ili
$B = \{$dva put je palo pismo, jednom glava$\}$.

27. Novčić bacaš 6 puta. Kolika je vjerojatnost da će više puta pasti pismo nego glava?

28. Dva jednako dobra igrača igraju igru a da nema neriješena ishoda.
1) Kolika je vjerojatnost da će nakon šest partija rezultat biti neriješen?
2) Kolika je vjerojatnost da jedan od igrača dobiti 4 partije?

29. U igri bez neriješena ishoda prvi igrač dobiva u prosjeku tri od pet partija. Kolika je vjerojatnost da će u sljedećih pet partija on dobiti barem tri?

30. Kocka je napravljena s pomaknutim težištem. Bačena je 360 puta i pokazala je sljedeće ishode:
broj 1 se pojavio 47 puta,
broj 2 se pojavio 62 puta,
broj 3 se pojavio 33 puta,
broj 4 se pojavio 88 puta,
broj 5 se pojavio 55 puta,
broj 6 se pojavio 75 puta.
1) Procijeni vjerojatnosti pojavljivanja svakog od brojeva na kocki.
2) Kolika je vjerojatnost da će se u dva bacanja ove kocke dobiti zbroj 3?
3) Koji se parovi brojeva nalaze na suprotnim stranama kocke?

31. Kolika je vjerojatnost da će se pri bacanju dviju kocaka pojaviti dvije jedinice točno četiri puta u šest pokušaja?

32. Vjerojatnost da strijelac pogodi metu je 0.8. Kolika je vjerojatnost da će od 5 pokušaja on
1) svaki put pogoditi;
2) pogoditi točno četiri puta;
3) promašiti samo u prvom pokušaju;
4) pogoditi barem tri puta?

33. Tri strijelca gađaju u istu metu. Vjerojatnosti njihovih pogodaka su redom 0.4, 0.6, 0.8. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena? Ako je pogođena točno dvama metcima, kolika je vjerojatnost da je promašio treći strijelac?

3.5. Formula potpune vjerojatnosti. Bayesova formula

Pri računanju vjerojatnosti nekog događaja A, ponekad je korisno sve moguće ishode razvrstati prema različitim mogućnostima za ostvarivanje pokusa i promatrati vjerojatnosti tog događaja u svakoj od tih situacija. Ilustrirajmo to primjerom.

Primjer 1.

Voćarnica se opskrbljuje jabukama iz dvaju voćnjaka, naručujući 60 % potrebne količine iz prvog i 40 % iz drugog voćnjaka. 15 % jabuka prvog voćnjaka prve su kvalitete, dok to vrijedi za 25 % jabuka drugog voćnjaka. Kolika je vjerojatnost da na sreću odabrana jabuka bude prve kvalitete?

Odaberemo na sreću jednu jabuku u voćarnici. Dvije su mogućnosti:

$$H_1 = \{\text{odabrana je jabuka iz prvog voćnjaka}\};$$
$$H_2 = \{\text{odabrana je jabuka iz drugog voćnjaka}\}.$$

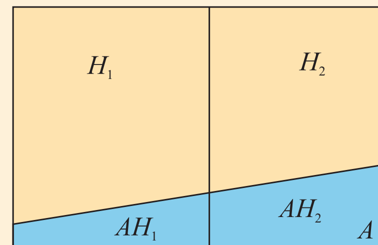
Vjerojatnosti da se ostvari neki od ovih događaja su

$$P(H_1) = 0.6, \qquad P(H_2) = 0.4\,.$$

Neka je A traženi događaj:

$$A = \{\text{odabrana jabuka prve je kvalitete}\}.$$

Ilustrirajmo ovu situaciju slikom:



Vjerojatnost događaja lakše se računa ako promotrimo zasebno različite situacije koje se pri njegovoj realizaciji mogu ostvariti.

Događaj A razbili smo na dva disjunktna događaja:

$$AH_1 = \{\text{odabrana jabuka prve kvalitete potječe iz prvog voćnjaka}\},$$
$$AH_2 = \{\text{odabrana jabuka prve kvalitete potječe iz drugog voćnjaka}\}.$$

Zato je

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2).$$

Vjerojatnosti umnoška događaja računamo na poznati način:

$$P(AH_1) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1).$$

Vjerojatnost da je jabuka prve kvalitete, ako je poznato da potječe iz prvog voćnjaka je, prema podatcima

$$P(A \mid H_1) = 0.15 \quad \Longrightarrow \quad P(AH_1) = 0.6 \cdot 0.15 = 0.09 \,.$$

Analogno tome vrijedi

$$P(A \mid H_2) = 0.25 \quad \Longrightarrow \quad P(AH_2) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.10 \,.$$

Sad dobivamo

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) = 0.09 + 0.10 = 0.19 \,.$$

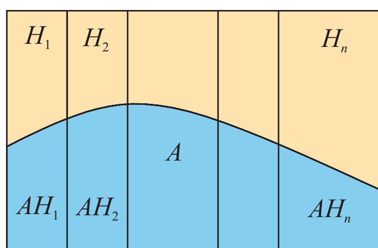


Poopćimo ovo razmatranje na slučaj kad se može pojaviti više različitih mogućnosti.

Pretpostavimo da skup elementarnih događaja možemo rastaviti u n međusobno disjunktnih događaja:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$$

pri čemu su događaji H_i, H_j disjunktni za $i \neq j$ i vrijedi $P(H_i) > 0$ za svaki i. Ovakav rastav nazivamo **particija vjerojatnosnog prostora**. Kažemo još da familija $H_1, \ldots, H_n$ čini **potpun sustav događaja**.



Slika prikazuje particiju vjerojatnosnog prostora. Skup Ω razbijen je na međusobno disjunktne skupove. Time je i svaki događaj A razbijen na međusobno disjunktne događaje.

Neka je $A \subset \Omega$ bilo koji događaj. Familijom $H_1, \ldots, H_n$ i on je razbijen na međusobno disjunktne događaje:

$$A = AH_1 \cup AH_2 \cup \ldots \cup AH_n.$$

Kako su događaji AH_i međusobno disjunktni, vrijedi:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) \\ &= P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n). \end{aligned}$$

Formula potpune vjerojatnosti

Neka je $\{H_1, \ldots, H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i).$$

Korisno je, zbog razloga koji će kroz primjere i zadatke postati jasnim, događaje $H_1, \ldots, H_n$ zvati **hipotezama**. Tijekom realizacije nekog pokusa ostvaruje se točno jedna hipoteza.

Primjer 2. U prvoj kutiji nalaze se tri crvene i dvije plave kuglice, a u drugoj četiri crvene i dvije plave. Odaberemo na sreću jednu kuglicu iz prve kutije i prebacimo je u drugu. Kolika je vjerojatnost da će kuglica nakon toga izvučena na sreću iz druge kutije biti plava?

▶ Vjerojatnost izbora plave kuglice ovisi o tome koje je boje kuglica koja je prebačena iz prve kutije u drugu. Postavimo sljedeće hipoteze:

$$H_1 = \{\text{prva kuglica je crvena}\}, \qquad P(H_1) = \frac{3}{5},$$
$$H_2 = \{\text{prva kuglica je plava}\}, \qquad P(H_2) = \frac{2}{5}.$$

Označimo s A događaj čiju vjerojatnost tražimo: kuglica izvučena iz druge kutije je plava. Ako se ostvari prva hipoteza, tad se u drugoj kutiji nalazi pet crvenih i dvije plave kuglice. Zato je

$$P(A \mid H_1) = \frac{2}{7}.$$

Ako se ostvari druga hipoteza, tad se u drugoj kutiji nalaze četiri crvene i tri plave kuglice. Zato je

$$P(A \mid H_2) = \frac{3}{7}.$$

Po formuli potpune vjerojatnosti, vrijedi

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35}.$$

Bayesova formula

Iz poznatih relacija

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

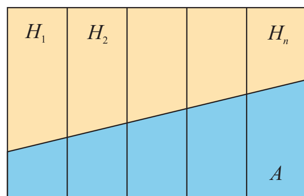
možemo napisati

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)}.$$

Ovu formulu koristimo uglavnom onda kad je događaj B jedna od hipoteza H_1, $\ldots, H_n$ na koje je razbijen skup Ω.

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

Pritom se vjerojatnost $P(A)$ računa uglavnom s pomoću formule potpune vjerojatnosti. Tako dobivamo **Bayesovu**[3] **formulu**.



Na slici je interpretirana situacija kad su apriorne vjerojatnosti svih hipoteza jednake. Nakon realizacije događaja A (plavo područje) vjerojatnosti se pojedinih hipoteza mijenjaju.

Bayesova formula

Vrijedi

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}.$$

Bayesovu formulu koristimo pri računanju *aposteriornih* vjerojatnosti pojedinih hipoteza. Prije početka pokusa svaka hipoteza ima svoju vjerojatnost realizacije $P(H_i)$. Nakon realizacije pokusa, ako znamo koji se elementarni događaj ostvario, tad je nestala neizvjesnost: ostvarila se samo jedna od mogućih hipoteza H_1, $\ldots, H_n$, dok za sve ostale znamo sa sigurnošću da se nisu ostvarile.

Pretpostavimo međutim da nam nije poznato koji se elementarni događaj ostvario, već umjesto toga znamo da se ostvario događaj $A \subset \Omega$. U tom slučaju ne znamo točno koja je od hipoteza $H_1, \ldots, H_n$ nastupila, ali dodatna informacija o realizaciji događaja A mijenja **apriorne vjerojatnosti** $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ pojedinih hipoteza. S pomoću Bayesove formule računamo uvjetne vjerojatnosti $P(H_1 \mid A), \ldots, P(H_n \mid A)$, koje nazivamo **aposteriornim vjerojatnostima** pojedinih hipoteza.

Primjer 3.

Bacamo kocku. Neka su H_1 i H_2 hipoteze, A i B događaji:

$$H_1 = \{\text{pao je parni broj}\}, \qquad H_2 = \{\text{pao je neparni broj}\},$$
$$A = \{\text{pao je broj veći od } 3\}, \qquad B = \{\text{kocka je pala na broj } 5\}.$$

Izračunajmo apriorne i aposteriorne vjerojatnosti hipoteza nakon realizacije događaja A, odnosno događaja B.

[3] Thomas Bayes (1702. – 1761.), engleski matematičar.

Prije bacanja kocke vjerojatnosti (apriorne) pojedinih hipoteza su

$$P(H_1) = \frac{1}{2}, \quad P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Bacili smo kocku i ostvario se događaj A. On sadrži tri elementarna događaja, $A = \{4, 5, 6\}$. Očigledno, sad hipoteza H_1 postaje vjerojatnija od H_2, jer događaj A sadrži dva parna i samo jedan neparan broj. Nove, aposteriorne vjerojatnosti su

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ako je pak poznato da se ostvario događaj B, tad nestaje svaka neizvjesnost. Naime, vrijedi

$$P(B \mid H_1) = 0, \quad P(B \mid H_2) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

i Bayesova formula daje očekivani rezultat:

$$P(H_1 \mid B) = \frac{P(H_1)P(B \mid H_1)}{P(B)} = 0,$$

$$P(H_2 \mid B) = \frac{P(H_2)P(B \mid H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 1,$$

jer uz ovu informaciju sa sigurnošću znamo da se ostvarila hipoteza H_2.

Primjer 4. U žari se nalaze tri kuglice. Znamo da je svaka od njih bijele ili crne boje. Točan broj kuglica pojedine boje nepoznat je i pretpostavljamo da je svaka mogućnost jednako vjerojatna. Jedna kuglica izabrana je na sreću. Ispostavilo se da je ona bijele boje. Što se sada može reći o vjerojatnostima pojedinih hipoteza?

▶ Prema pretpostavci, sve hipoteze

$$H_i = \{\text{u žari se nalazi } i \text{ bijelih kuglica}\}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

su jednako vjerojatne:

$$P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{4}.$$

Nakon realizacije događaja

$$A = \{\text{izvučena je kuglica bijele boje}\}$$

hipoteza H_0 postaje nemoguća, dok se vjerojatnosti ostalih hipoteza mijenjaju. Vidjet ćemo da raste vjerojatnost onih hipoteza koje zastupaju veći broj bijelih kuglica. Izračunajmo koliko.

Vrijedi

$$P(A \mid H_0) = 0, \qquad P(A \mid H_1) = \frac{1}{3},$$
$$P(A \mid H_2) = \frac{2}{3}, \qquad P(A \mid H_3) = 1.$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti,

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

i Bayesova formula daje (Provjerite!):

$$P(H_0 \mid A) = 0, \quad P(H_1 \mid A) = \frac{1}{6},$$
$$P(H_2 \mid A) = \frac{1}{3}, \quad P(H_3 \mid A) = \frac{1}{2}.$$

Primjer 5.

Iz žare koja sadrži 5 bijelih i 3 crne kuglice izvučene su dvije kuglice. Pokazalo se je da je prva kuglica bijela. Kolika je vjerojatnost da je i druga kuglica bijela?

Da smo kuglice izvlačili jednu po jednu, odgovor bi bio jednostavan. Nakon što smo izvukli prvu kuglicu, među preostalih 7 kuglica su 4 bijele, pa je vjerojatnost da nakon toga izvučemo bijelu kuglicu jednaka $\frac{4}{7}$.

Ako izvlačimo odjednom dvije kuglice pa nakon toga pogledamo boju jedne od njih, mijenja li se ova vjerojatnost? Intuitivni je zaključak: ne! Trebalo bi biti svejedno jesmo li kuglice izvukli odjednom (i pogledali zatim boju jedne od njih), ili izvlačili jednu po jednu! Želimo li to dokazati, označimo hipoteze:

$$H_0 = \{\text{izvučene su dvije crne}\}, \qquad P(H_0) = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{3}{28},$$
$$H_1 = \{\text{izvučene su bijela i crna}\}, \qquad P(H_1) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28},$$
$$H_2 = \{\text{izvučene su dvije bijele}\}, \qquad P(H_2) = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 8} = \frac{10}{28}.$$

Realizirao se događaj A: otkrivena kuglica je bijela:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_0) \cdot P(A|H_0) + P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) \\ &= \frac{3}{28} \cdot 0 + \frac{15}{28} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{28} \cdot 1 = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Tražimo vjerojatnost $P(H_2|A)$:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{28}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}.$$

Primjer 6. Ako je pacijent alergičan na penicilin, vjerojatnost da će negativno reagirati i na novi lijek je 0.4. Ako on nije alergičan na penicilin, vjerojatnost negativne reakcije je 0.1. Oko 9 % populacije alergično je na penicilin.

Pacijent je negativno reagirao na novi lijek. Kolika je vjerojatnost da je on alergičan na penicilin?

▶ Označimo s A događaj:

$$A = \{\text{reakcija na novi lijek će biti negativna}\}.$$

Vjerojatnost događaja A ćemo odrediti rabeći formulu potpune vjerojatnosti. Hipoteze ćemo označiti s H i H^-:

$$H = \{\text{pacijent je alergičan na penicilin}\},$$
$$H^- = \{\text{pacijent nije alergičan na penicilin}\}.$$

Apriorne vjerojatnosti hipoteza su $P(H) = 0.09$ i $P(H^-) = 0.91$. Sada imamo

$$P(A) = P(H)P(A \mid H) + P(H^-)P(A \mid H^-)$$
$$= 0.09 \cdot 0.4 + 0.91 \cdot 0.1 = 0.127.$$

Nakon što je pacijent negativno reagirao na novi lijek, apriorna vjerojatnost hipoteze H se mijenja. Po Bayesovoj formuli ona sad iznosi

$$P(H \mid A) = \frac{P(H)P(A \mid H)}{P(A)} = \frac{0.09 \cdot 0.4}{0.127} = 0.28.$$



Točno-netočno pitalice

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Vjerojatnost nemogućeg događaja ne postoji, jer je takav događaj nemoguć. T N
2. Ako su A i B disjunktni, onda su oni nezavisni. T N
3. Pismo i glava imaju jednaku vjerojatnost pojavljivanja. Zato se u 10 bacanja novčića mora 5 puta pojaviti pismo i 5 puta glava. T N
4. Pri bacanju 8 novčića jednaka je vjerojatnost da se pismo pojavi paran kao i neparan broj puta. T N
5. Pri bacanju 9 novčića jednaka je vjerojatnost da se pismo pojavi paran kao i neparan broj puta. T N
6. Iskustvo pokazuje da je frekvencija pojavljivanja svih brojeva na LOTU 6 od 45 jednaka, i iznosi $6/45$. Ako se broj 5 nije pojavio u prethodnih 15 izvlačenja, tad je vjerojatnost da se pojavi u sljedećem izvlačenju veća od $6/45$. T N

Zadatci 3.5.

1. U prvoj se žari nalaze 3 bijele i 2 crne kuglice, u drugoj 1 bijela i 3 crne. Izvučena je kuglica iz na sreću odabrane žare. Kolika je vjerojatnost da je ona bijela?

2. Između brojeva 1, 2, 3, 4, 5 odabire se na sreću jedan broj, a od preostalih se ponovno odabire na sreću još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da je drugi broj paran?

3. U skupini od 10 strijelaca nalaze se 4 izvrsna i 6 dobrih. Vjerojatnost pogotka za izvrsne strijelce je 0.9, za dobre 0.7. Iz skupine na sreću biramo jednog strijelca. Kolika je vjerojatnost da će on pogoditi metu?

4. U prvoj se žari nalaze 4 bijele i 2 crne kuglice, u drugoj 3 bijele i 2 crne. Iz prve žare prebacimo u drugu jednu na sreću odabranu kuglicu. Izračunaj vjerojatnost da nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge žare bude bijela.

5. U prvoj se žari nalaze 2 bijele i 3 crne kuglice, u drugoj 1 bijela i 4 crne. Iz prve žare prebacimo u drugu dvije na sreću odabrane kuglice. Izračunaj vjerojatnost da nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge žare bude bijela.

6. U dva snopa karata nalaze se po 52 karte sa po 4 asa. Izvučemo na sreću po jednu kartu iz svakog snopa, zatim izvučene karte pomiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta as?

7. U dva snopa karata nalaze se po 52 karte, sa po 4 asa. Iz jednog snopa izvučemo jednu kartu, a iz drugog dvije. Zatim tri izvučene karte promiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta as?

8. Cilj se gađa iz triju topova. Svaki top ispaljuje jednu granatu. Topovi pogađaju cilj neovisno jedan od drugog s vjerojatnošću 0.4. Ako jedan top pogodi cilj, on ga uništava s vjerojatnošću 0.3, a ako ga pogode dva topa, onda s vjerojatnošću 0.7, a ako ga pogode sva tri topa, onda s vjerojatnošću 0.9. Kolika je vjerojatnost uništenja cilja?

— ◆ —

9. Dva igrača bacaju kocku. Ako je prvi dobio veći broj, kolika je vjerojatnost da je taj broj jednak 6? (Zadatak riješi uporabom Bayesove formule.)

10. Bacaju se dvije kocke, bijela i plava. Ako se pojavio zbroj 5, kolika je vjerojatnost da je bijela kocka pala na broj 4? (Zadatak riješi uporabom Bayesove formule.)

11. U kutiji se nalazi 1000 kockica, od kojih su sve ispravne osim jedne koja na svim stranama ima broj 6. Izvučena je na sreću jedna kockica i bačena četiri puta: sva četiri puta pala je na broj 6. Kolika je vjerojatnost da je to neispravna kockica?

12. U dvije od tri jednake pregrade nalaze se 2 crne i 2 bijele kuglice, a u trećoj 5 bijelih i 1 crna. Iz na sreću odabrane pregrade izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je ona izvučena iz treće pregrade?

13. U devet od deset jednakih pregrada nalaze se 2 crne i 2 bijele kuglice, a u desetoj 5 bijelih i 1 crna. Iz na sreću odabrane pregrade izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je ona izvučena iz desete pregrade?

14. Bitnica ima 4 topa. Vjerojatnost pogotka prvog topa je $30\ \%$, a ostalih triju topova $20\ \%$. Za uništenje cilja dovoljan je jedan pogodak. Jedan od topova gađao je dvaput i cilj je bio uništen. Kolika je vjerojatnost da je gađao prvi top?

15. Iz snopa od 52 karte izvučena je jedna karta. Nakon toga, izvučene su još dvije i pokazalo se da su obje karte pik boje. Kolika je vjerojatnost da je i prva karta pik boje?

4 Nizovi



Pojam niza[1] blizak je pojmu prebrojavanja. Riječ 'nizati' iz koje se izvodi i riječ niz sinonim je za 'brojiti po redu'. U običnom jeziku pod nizom podrazumijevamo poredanu skupinu bilo kakvih (obično svojstvima sličnih) objekata, poput niza bisera, niza kuća, niza sunčanih dana i slično. Pritom imamo u vidu poredak tih objekata; biseri su nanizani jedan za drugim (inače bismo govorili o hrpi), kuće su označene i poredane svojim brojevima, a svaki dan ima svoj nadnevak.

4.1. Pojam niza. Zadavanje niza

Ispisujući redom elemente nekog skupa S:

$$a_1, a_2, a_3 \dots$$

dobivamo **niz u skupu** S. Tako su

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\dots$$
$$15,\ 9,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4\dots$$

dva različita niza u skupu prirodnih brojeva.

Definicija niza

Niz u skupu S je svaka funkcija $a : \mathbf{N} \to S$. Ona prirodnom broju n pridružuje element a_n skupa S. Element a_n nazivamo **općim** ili **n-tim članom** niza, a sam niz označavamo simbolom (a_n). Niz ima beskonačno mnogo članova:

$$a_1, a_2, \dots, a_n \dots$$

Primjer 1.

1) Za $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $a_n = n$ dobivamo niz prirodnih brojeva

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 4\dots$$

2) Za $a_n = 2n$ dobivamo niz parnih prirodnih brojeva

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6\dots$$

Njegov opći (n-ti) član je broj $2n$.

3) Za $a_n = 2n - 1$ dobivamo niz neparnih prirodnih brojeva

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5\dots$$

Primjerice, sedamnaesti član ovog niza je $a_{17} = 2 \cdot 17 - 1 = 33$.

Ako je $S \subset \mathbf{R}$, govorimo o nizu u skupu $\mathbf{R}$ ili kraće, o nizu realnih brojeva. Mi ćemo se baviti isključivo nizovima kojima su članovi brojevi.

[1] Za niz se rabi i riječ *slijed*.

Najjednostavnije je zadati niz formulom za njegov opći član.

Primjer 2.

Odredimo nekoliko prvih članova niza ako je

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$, **2)** $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$, **3)** $a_n = 2^{-n}$, **4)** $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$.

1) $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4}\dots$ **2)** $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{6}{7}\dots$

3) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{32}\dots$ **4)** $0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1\dots$

Primjer 3.

Niz 3, 1, 4, 1, 5, 9... kojemu su članovi znamenke u decimalnom prikazu broja π je dobro definiran niz kojemu ne znamo formulu za opći član.

Isto možemo reći i za niz prostih brojeva: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...

Zadatak 1.

1) Koliki je zbroj trećeg, šestog i devetog člana niza s općim članom $a_n = n^{-2}$?
2) Koliki je zbroj četvrtog, devetog i dvadesetpetog člana niza s općim članom $a_n = \sqrt{n}$?

Zadatak 2.

Zadan je niz (a_n) s općim članom:

$$a_n = \begin{cases} -1, & \text{ako je } n \text{ paran broj,} \\ 2n-1, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 100 članova ovog niza?

Primjer 4.

S prvih nekoliko članova niz *nije određen*. Mi možemo pokušati zamisliti formulu za n-ti član niza (kako se to radi u raznim testovima domišljatosti) i onda nastaviti niz, no za to nema nikakva matematička opravdanja. Neka su napisana prva tri člana niza

$$1,\ 2,\ 3\dots$$
$$1,\ 1,\ 2\dots$$
$$1,\ 0,\ 1\dots$$

Pokušajte odrediti barem dva logična nastavka ovih nizova (bez zadanog općeg člana, niz se inače može nastaviti na bilo koji način).

Konačni niz

Svako preslikavanje $a : \{1, 2, \dots, n\} \to S$ definira **konačni niz** u skupu S. Taj niz ima n članova:

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Nizovi zadani rekurzivnim formulama

Nizove možemo zadavati s pomoću **rekurzivnih formula**, u kojima se članovi niza zadaju s pomoću već prije definiranih.

Primjer 5. Neka je

$$a_1 = 1, \quad a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Time je definiran niz

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \cdot 1 = 2, \quad a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$a_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1.$$

Dakle, $a_n = n!$.

Primjer 6. Neka je

$$a_0 = 1, \qquad a_n = 1 + a_1 + \ldots + a_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Prvih nekoliko članova ovog niza glasi:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8 \ldots$$

Prvi je član označen indeksom 0, što je čest slučaj u zadavanju nizova. Matematičkom indukcijom pokažite da vrijedi $a_n = 2^n$.

Primjer 7. Niz (a_n) zadan je rekurzivnom formulom $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. Ako je $a_1 = 2$, koliko je a_{55}?

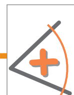
Najprije danu jednakost zapišimo u obliku $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$. Uvrštavanjem redom umjesto n brojeva od 1 do 55 dobijemo niz jednakosti:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 3, \\ a_3 - a_2 &= 5, \\ a_4 - a_3 &= 7, \\ &\ldots \\ a_{55} - a_{54} &= 109. \end{aligned}$$

Zbrojimo sada sve te jednakosti pa dobijemo: $a_{55} - a_1 = 3 + 5 + 7 + \ldots + 109$. Kako je zbroj prvih k neparnih brojeva jednak k^2, zbroj s lijeve strane ove jednakosti jednak je $55^2 - 1 = 3024$.

Dakle je $a_{55} = 3026$.

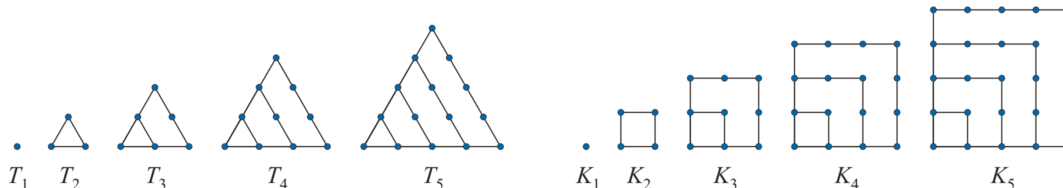
Zadatak 3. Niz je zadan rekurzivnom formulom $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 5$, $n \geqslant 2$. Odredi nekoliko prvih članova niza, napiši formulu za opći član niza i dokaži je matematičkom indukcijom.



Kutak plus

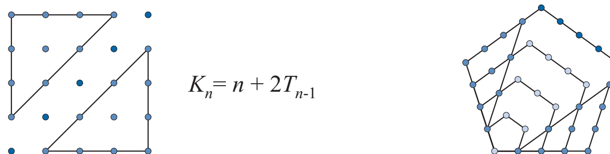
POLIGONALNI BROJEVI

Brojevi 1, 3, 6, 10, 15, 21... nazivaju se **trokutasti brojevi**. Ako s T_n označimo n-ti trokutasti broj, onda vrijedi rekurzivna relacija $T_1 = 1$ i $T_n = T_{n-1} + n$. Razlog ovom imenu i konstrukcija prvih nekoliko trokutastih brojeva vidi se na slici dolje lijevo.



Brojevi 1, 4, 9, 16, 25, 36... nazivaju se **kvadratni brojevi**. Ako s K_n označimo n-ti kvadratni broj, onda vrijedi $K_1 = 1$ i $K_n = K_{n-1} + (2n-1)$ (slika gore desno). Dakako, možemo odmah napisati eksplicitnu formulu za ove brojeve: $K_n = n^2$.

Postoji veza između trokutastih i kvadratnih brojeva: $K_n = 2T_{n-1} + n$. Kao dokaz, može poslužiti slika dolje lijevo:



Na sličan način se može potvrditi veza između peterokutastih i trokutastih brojeva: $P_n = 3T_{n-1} + n$. Ona se lako razbire na slici broja P_5 (gore desno).

Formulom $S_n = 4T_{n-1} + n$ definiraju se dalje šesterokutasti brojevi. Sve ove brojeve možemo prikazati istom formulom. Niz k-**poligonalnih** definiramo kao

$$M_n^k = (k-2)T_{n-1} + n. \qquad (*)$$

Tu se za $k = 3$ dobiju trokutasti brojevi, za $k = 4$ kvadratni brojevi, za $k = 5$ peterokutasti brojevi itd.

Fermat je tvrdio da se svaki prirodni broj može prikazati kao zbroj od *najviše* k k-poligonalnih brojeva. Primjerice, svaki je prirodni broj zbroj od najviše tri trokutasta broja, ili najviše četiri kvadratna broja. Fermatov dokaz nikad nije pronađen. Za $k = 4$ dokaze su dali **Jacobi**, **Euler** i **Lagrange** (1772.). Slučaj $k = 3$ dokazao je **Gauss** (1796.). Općeniti teorem dokazao je **Cauchy** (1813.).

1. Dokaži da je $K_n = n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$.

2. Dokaži da vrijedi $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

3. Dokaži da vrijedi $M_n^k = \frac{1}{2}n[(k-2)n - k + 4]$.

4. Napiši sve peterokutaste brojeve manje od 100.

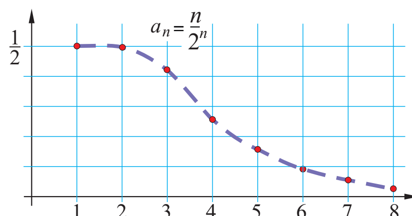
5. Napiši sve šesterokutaste brojeve manje od 100.

6. Provjeri Fermatov teorem za slučaj $k = 3$ i sve brojeve manje od 100.

7. Provjeri Fermatov teorem za slučaj $k = 4$ i sve brojeve manje od 100.

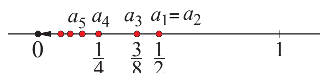
Grafičko predočavanje nizova

Niz grafički predočavamo na dva načina. Prvi se zasniva na tome da je niz *funkcija* definirana u prirodnim brojevima, pa joj vrijednosti možemo ucrtavati u koordinatnom sustavu.



Grafički prikaz niza. Prikazano je prvih nekoliko članova niza $a_n = n/2^n$. Crtice koje spajaju članove niza pomažu u njegovom lakšem uočavanju i sugeriraju da je niz možda tek restrikcija vrijednosti realne funkcije u prirodnim brojevima.

Druga mogućnost prikazivanja nizova jest da naznačimo njihov položaj na brojevnom pravcu. Taj je način manje očit, ali se rabi u situacijama kad niz tek naznačuje točke u kojima će biti definirana neka druga funkcija, ili kad sugerira gomilanje članova niza oko nekog broja.



Niz realnih brojeva iz gornjeg primjera. Članovi niza opadaju prema nuli.

Zadatci 4.1.

1. Napiši prvih pet članova niza (a_n) ako mu je prvi član

1) 6, a svaki sljedeći veći za 3;
2) 2, a svaki sljedeći veći tri puta;
3) 21, a svaki sljedeći manji za 6;
4) 40, a svaki sljedeći dvaput manji.

2. Napiši prvih pet članova niza (a_n) kojem je opći član a_n zadan formulom:

1) $a_n = 2n - 3$; **2)** $a_n = \frac{n-1}{n+1}$;
3) $a_n = -3 + (-1)^n$; **4)** $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
5) $a_n = \frac{1}{n!}$; **6)** $a_n = 1 + (-1)^n$;
7) $a_n = n(n+1)$; **8)** $a_n = \frac{(-1)^n + (-1)^{n-1}}{2}$.

3. Napiši prvih pet članova niza (a_n) ako je:

1) $a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$; **2)** $a_n = \lfloor \sqrt{n^2 + n} \rfloor$;
3) $a_n = \log 0.1^n$; **4)** $a_n = \lfloor \log_2 n \rfloor$;
5) $a_n = \sin \pi n$; **6)** $a_n = \cos \frac{2\pi n}{3}$.

4. Napiši prvih pet članova niza (a_n) kojem je opći član a_n:

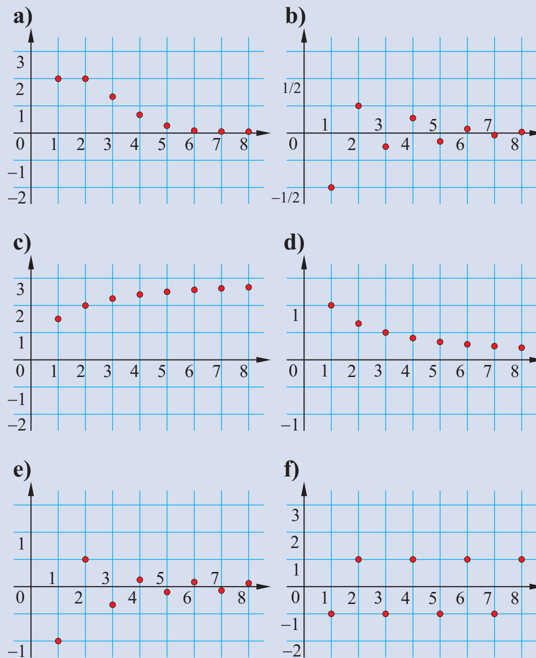
1) $a_n = \sum_{k=1}^{n} k$; **2)** $a_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$;
3) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; **4)** $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

5. Napiši prvih pet članova niza zadanog općim članom

1) $a_n = 2^n - 1$; **2)** $a_n = 3^{-n}$;
3) $a_n = 1 + (-1)^n$; **4)** $a_n = \frac{n+1}{n}$;

5) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; **6)** $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

6. Povežite niz s njegovim grafom



1) $\frac{3n}{n+1}$; **2)** $\frac{(-1)^n}{n}$; **3)** $\frac{2}{n+1}$;

4) $(-1)^n$; **5)** $\frac{2^n}{n!}$; **6)** $(-\frac{1}{2})^n$.

7. Skicirajte vrijednosti prvih šest članova sljedećih nizova

1) $a_n = \frac{1}{2}n$; **2)** $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, $a_1 = 8$;

3) $a_n = \frac{3n}{n+1}$; **4)** $a_n = \frac{n(n+1)}{16}$.

8. Izračunaj:

1) $\sum_{k=1}^{5} k(k+1)$; **2)** $\sum_{k=1}^{7} (-1) \cdot (k+1)$;

3) $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k!}$.

9. Zapiši prvih deset članova niza (a_n) čiji je opći član zadan na sljedeći način:

1) $a_n = \begin{cases} \frac{1-n}{2}, & \text{za neparne } n, \\ \frac{n}{2}, & \text{za parne } n; \end{cases}$

2) $a_n = \begin{cases} 0, & n = 3k, \\ 1, & n = 3k-1, \\ 2, & n = 3k-2, \; k \in \mathbf{N}. \end{cases}$

10. Zadan je niz (a_n):

$$a_n = \begin{cases} 4n-1, & \text{ako je } n \text{ neparan broj,} \\ -1, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 100 članova ovog niza?

11. Odredi jednostavno pravilo u formiranju sljedećih nizova i napiši n-ti član a_n niza kojemu prvih nekoliko članova glasi:

1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;

2) $2, 3, 5, 9, 17, \ldots$;

3) $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$;

4) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$;

5) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \frac{1}{31}, \ldots$;

6) $2, 9, 28, 65, 126, \ldots$;

7) $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$;

8) $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots$.



12. Koliki je umnožak šestog, dvanaestog i osamnaestog člana niza čiji je opći član $a_n = \sqrt{n}$?

13. Koliki je zbroj četvrtog, petog i šestog člana niza s općim članom $a_n = (-1)^n \cdot n^{-1}$?

14. Odredi zbroj prvih pet članova niza (a_n) s parnim indeksima, ako je $a_n = n - (-1)^n \cdot 2^{n-1}$.

15. Odredi zbroj prvih pet članova niza (a_n) s neparnim indeksima, ako je $a_n = n - (-1)^n \cdot 2^{n-1}$.

16. Opći član niza je $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$. Odredi aritmetičku sredinu prvih 100 članova ovog niza.



17. Odredi moguću rekurzivnu formulu za sljedeće nizove i ispiši naredna dva člana tih nizova.

1) 5, 9, 17, 33, 65,...;
2) 4, 7, 11, 16, 22,...;
3) 2, 1, 3, 4, 7, 11,...;
4) 1, 2, 6, 15, 31, 56,....

18. Napiši prvih pet članova niza (a_n) zadanog rekurzivnim formulama:

1) $a_n = a_{n-1} + 1$, $a_1 = 1$;
2) $a_n = a_{n-1} + n$, $a_1 = 1$;
3) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
4) $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

19. Napiši prvih pet članova niza (a_n) ako je:

1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n - n$, $n \geqslant 1$;
2) $a_1 = 3$, $a_n = n^2 + 2a_{n-1}$, $n \geqslant 2$;
3) $a_1 = 1$, $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$, $n \geqslant 2$;
4) $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1}^2 - na_{n-2}$, $n \geqslant 3$;
5) $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geqslant 3$.

20. Dan je niz (a_n) pri čemu je $a_1 = 1$, a za sve $n > 1$ je $a_n = \frac{n}{a_{n-1}}$. Izračunaj $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{100}$.

21. U nizu (a_n) je $a_1 = 2, a_2 = 3$ a za sve $n > 2$ je $a_n = a_{n-1}a_{n+1}$. Odredi $a_{1\,000}$.

22. U nizu (a_n) je $a_1 = 1, a_2 = 2$ a za sve $n \geq 1$ je $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Odredi a_{777}.

23. Ako je $a_n = 2^n$ opći član niza (a_n), dokaži da tada za svaka tri uzastopna člana niza vrijedi $a_{n+2} + 2a_n = 3a_{n+1}$.

24. Opći član niza (a_n) zadan je formulom $a_n = 7n + 3$. Isti niz zapiši rekurzivnom relacijom.

25. Ako je opći član a_n niza (a_n) zadan sa $a_n = 5 \cdot 2^{-n}$, $n \in \mathbf{N}$, kako glasi zapis istog niza rekurzivnom relacijom?

26. Niz (a_n) ima sljedeće svojstvo: Ako su m i n bilo koja dva uzastopna člana niza, onda je sljedeći član jednak razlici $n - m$. Neka je $a_1 = a$, $a_2 = b$. Koliki je zbroj prvih 66 članova niza?

27. U nizu (a_n) je $a_1 = k$, a za $n > 1$ vrijedi $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$. Postoji li u tom nizu još neki član jednak k?

28. Odredi prva tri člana niza a, b, c, 1, 0, 1, 1, 2, ..., ako je svaki član niza jednak zbroju dvaju prethodnih članova.

29. Ako je $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 3$, $n \in \mathbf{N}$, tada je $a_n = 3n + 2$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Dokaži!

30. Zadan je niz (a_n), $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n$. Dokaži da je opći član ovog niza $a_n = (2n-1)^2$.

31. Dokaži: ako je $a_1 = 1$ i $a_n = 2a_{n-1} + 3$, $n \geqslant 2$, tada je opći član tog niza $a_n = 2^{n+1} - 3$.

32. Ako je $a_1 = 8$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, $n \in \mathbf{N}$, dokaži da je onda $a_n = 16 \cdot 2^{-n}$ za sve $n \in \mathbf{N}$.

33. Provjeri da je opći član niza (a_n), $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$, $n \geqslant 1$, zadan formulom $a_n = \frac{n}{n+1}$.

34. Provjeri da je opći član niza (a_n), $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n}$, $n \geqslant 1$, zadan formulom $a_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 2}{3 \cdot 2^{n-1} - 1}$.

35. Provjeri da je zapisom $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}$, $n \geqslant 2$, zadan niz s općim članom $a_n = \frac{1}{n}$.

36. Ako je $a_1 = 1$ i $a_n = 2a_{n-1} + 3$, $n \geqslant 2$, pokaži da vrijedi $a_n = 2^{n+1} - 3$.

4.2. Aritmetički niz

Koje je svojstvo zajedničko sljedećim nizovima:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\dots \qquad 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\dots$$
$$8,\ 5,\ 2,\ -1,\ -4\dots \qquad 100,\ 90,\ 80,\ 70,\ 60\dots?$$

Aritmetički niz

Niz je **aritmetički** ako je razlika bilo kojeg člana i člana ispred njega stalna i iznosi d:

$$a_n - a_{n-1} = d, \qquad n \geqslant 2.$$

Broj d naziva se **razlika** (**diferencija**) **aritmetičkog niza.**

Članovi aritmetičkog niza vezani su rekurzivnom formulom

$$a_n = a_{n-1} + d, \qquad n \geqslant 2. \tag{1}$$

Da bi niz bio određen, dovoljno je da znamo prvi član niza a_1 i broj d. Nekoliko prvih članova niza su

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d\dots$$

Primjerice, ako je $a_1 = -5$ i $d = 3$, dobivamo niz brojeva $-5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7\dots$

U nizu $8,\ 5,\ 2,\ -1,\ -4\dots$ je $a_1 = 8$ i $d = -3$.

Primjer 1. Ispišimo nekoliko prvih članova aritmetičkog niza ako je zadan prvi član i razlika niza.

a_1	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	3	2	5	8	11	14
2	−3	2	−1	−4	−7	−10
−7	2	−7	−5	−3	−1	1
−7	−2	−7	−9	−11	−13	−15

Zadatak 1. Prepišite tablicu u bilježnicu i popunite kućice u sljedećim primjerima aritmetičkog niza. Primijetite da je dovoljno zadati bilo koja dva člana niza:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
3	−1				
11		19		27	
				5	11
	3				9

O podrijetlu imena

Zbog čega se ovaj niz naziva *aritmetičkim*? Iz $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ slijedi

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog), aritmetička je sredina dvaju susjednih članova. Odatle nizu ime.

Opći član aritmetičkog niza

Formula za opći član aritmetičkog niza lako se određuje iz

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d,\\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d,\\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d,\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d.
\end{aligned}$$

Opći član aritmetičkog niza

Aritmetički niz s prvim članom a_1 i razlikom d ima opći član

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \qquad (2)$$

Primjer 2.

Dan je aritmetički niz $14, 11, 8, 5, 2 \ldots$
1) Odredi opći član ovoga niza.
2) Je li broj -105 član ovog niza?
3) Koliko je u tom nizu članova za koje je $|a_n| < 30$?

1) Prvi član niza je $a_1 = 14$, razlika niza iznosi $d = -3$. Taj je niz padajući. Njegov je opći član jednak

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 14 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 17.$$

2) Iz jednadžbe $-105 = -3n + 17$ slijedi $n = \frac{122}{3}$, a to nije cijeli broj. Dakle -105 nije član ovog aritmetičkog niza.

3) Iz uvjeta $|-3n + 17| < 30$ slijedi $-30 < -3n + 17 < 30$, odnosno $-47 < -3n < 13$. Taj sustav nejednakosti zapišimo u obliku

$$-\frac{13}{3} < n < \frac{47}{3}.$$

Kako je n prirodan broj, rješenje je $n = 1, 2, 3, \ldots, 15$. U tom su nizu dakle prvih 15 članova po apsolutnoj vrijednosti manje od 15.

Zadatak 2. Koji je po redu prvi pozitivni član aritmetičkog niza

$$-\frac{27}{4}, -6, -\frac{21}{4}, -\frac{9}{2} \ldots ?$$

Zbroj prvih n članova niza

U mnogim primjenama aritmetičkog niza nije nam važan samo njegov opći član, već i zbroj prvih nekoliko njegovih članova. Zbrajajući redom njegove članove dobit ćemo novi niz, na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S_1 &:= a_1, \\ S_2 &:= a_1 + a_2, \\ S_3 &:= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ S_n &:= a_1 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Broj S_n jednak je zbroju prvih n članova aritmetičkog niza. On se naziva **n-ta parcijalna suma** aritmetičkog niza, a niz (S_n) naziva se **niz parcijalnih suma**.

Odredimo formulu za zbroj S_n.

Primijetimo da prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_1, \quad a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n,$$

napisanih u suprotnom poretku:

$$a_n, \quad a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$$

ponovno čini aritmetički niz, kojem je prvi član a_n, a razlika $-d$. Pogledajmo na primjeru nizova:

$$\begin{array}{rrrrrr} 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20 \\ 20, & 17, & 14, & 11, & 8, & 5 \end{array}$$

Zato se S_n može napisati na dva načina:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d],$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + [a_n - (n-1)d].$$

Zbrajajući ove jednakosti dobit ćemo

$$2S_n = n(a_1 + a_n).$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{3}$$

Iskoristimo li (2), možemo napisati i

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Primjer 3.

Zbroj prvih n prirodnih brojeva dan je formulom

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad (4)$$

a zbroj prvih n neparnih brojeva formulom

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2. \qquad (5)$$

U prvom slučaju je $a_1=1$, $a_n=n$, a u drugom $a_1=1$, $a_n=(2n-1)$. Uvrštavanjem u (3) dobivamo traženi izraz.

Primjer 4.

Zbroj prvih deset članova aritmetičkog niza jednak je 60, zbroj prvih dvadeset članova iznosi 320. Koliki je zbroj prvih trideset članova toga niza?

Iz uvjeta $S_{10}=60$ i $S_{20}=320$ slijedi sustav jednadžbi $5(a_1+a_{10})=60$ i $10(a_1+a_{20})=320$. Raspišemo li brojeve a_{10} i a_{20} prema formuli $a_n=a_1+(n-1)d$, taj sustav možemo zapisati u obliku $2a_1+9d=12$ i $2a_1+19d=32$.

Riješimo ga i dobijemo $a_1=-3$, $d=2$.

Konačno je $S_{30}=15(a_1+a_{30})=15(-3+55)=15\cdot 52=780$.

Zadatak 3. U aritmetičkom nizu je 20 članova. Zbroj onih na parnim mjestima je 280, a onih na neparnim 260. Odredi opći član ovoga niza.

Primjer 5.

Tijelo pri padu u prvoj sekundi prijeđe 4 metra, a svake sljedeće sekunde prevaljeni put se povećava za 8 metara. Koliko dugo će tijelo padati s visine od 1000 metara?

Neka je S_n prevaljeni put tijela nakon n sekunda. Taj se put može dobiti kao zbroj aritmetičkog niza

$$S_n=4+12+20+\ldots+[4+(n-1)\cdot 8]$$

Zbroj članova ovog niza je

$$S_n=\frac{[4+4+8(n-1)]n}{2}=4n^2.$$

Trebamo odrediti najmanji n za koji je ispunjeno

$$4n^2>1000.$$

Odavde dobivamo $n>\sqrt{250}=15.81\ldots$ Tijelo će udariti u tlo u 16. sekundi pada.

Interpolacija aritmetičkog niza

Poznajemo li dva uzastopna člana aritmetičkog niza, njihovim oduzimanjem dobit ćemo razliku niza, čime je niz određen. Tu razliku možemo izračunati ako su nam poznata *ma koja dva* člana niza, ne nužno uzastopna.

Problem određivanja članova niza u tom se slučaju naziva **interpolacija**. Ime dolazi odatle što između zadanih članova niza moramo interpolirati (umetnuti) nekoliko članova niza tako da on bude aritmetički. Postavimo problem.

Između dvaju zadanih brojeva a i b treba interpolirati r brojeva tako da dobiveni niz bude aritmetički, u kojem je a prvi, a b posljednji član niza.

Neka je $a_1 = a$ prvi član dobivenog niza, a $a_n = b$ njegov posljednji član. Članova niza ima ukupno $n = r + 2$. Stoga je

$$a_n = a_1 + (n-1)d \implies b = a + (r+1)d,$$

odakle dobivamo

$$d = \frac{b-a}{r+1}. \qquad (6)$$

Primjer 6.

Između -6 i 15 umetni osam brojeva koji će s dva zadana činiti deset uzastopnih članova aritmetičkog niza.
1) Koliki je zbroj svih članova niza?
2) Odredi sve cjelobrojne članove niza.

U tome je nizu ukupan broj članova 10, pa imamo $a_1 = -6$, $a_{10} = 15$. Zbroj svih članova možemo odrediti na temelju samo tih podataka:

$$S = (a_1 + a_{10}) \cdot \frac{10}{2} = 45.$$

Budući da je $a_{10} = a_1 + 9d$, odnosno, $15 = -6 + 9d$, dobivamo $d = \frac{7}{3}$ te imamo sljedeći niz:

$$-6,\ -\frac{11}{3},\ -\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{10}{3},\ \frac{17}{3},\ 8,\ \frac{31}{3},\ \frac{38}{3},\ 15.$$

Četiri člana ovog niza su cijeli brojevi.

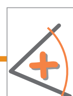
Zadatak 4. Ivica je odlučio uštedjeti za polovni automobil. Prvi je mjesec odvojio 2100 kn. On kani tijekom jedne godine povećavati mjesečni iznos štednje za istu svotu, tako da na kraju godine skupi oko 35 000 kuna. Koliko mora odvojiti tijekom drugog mjeseca? Koliki će taj iznos biti posljednjeg mjeseca štednje?



Točno-netočno pitalice

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

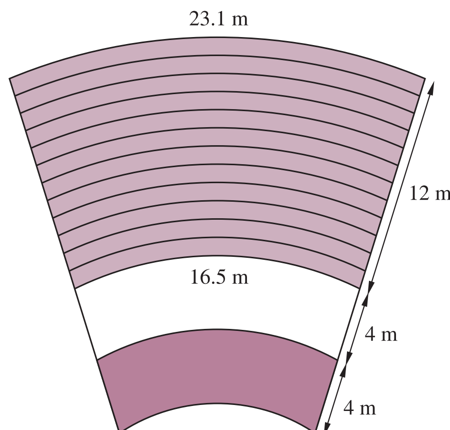
1. Aritmetički niz mora imati barem tri člana. T N
2. Razlika d aritmetičkog niza mora biti pozitivan broj. T N
3. Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza veći je od n-tog člana tog niza. T N
4. Niz $a_n = \pi n$ je aritmetički. T N
5. U bilo kojem aritmetičkom nizu vrijedi $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n+2})$. T N
6. Ako je neki član aritmetičkog niza negativan, onda je i sljedeći član negativan. T N
7. Ako su dva uzastopna člana aritmetičkog niza različitih predznaka, onda je njegova razlika negativna. T N



Kutak plus

LJETNA POZORNICA

Oblik teatra na otvorenom dan je na slici: ono je načinjeno u obliku dijela kružnog isječka. Gledalište mu je izrađeno u formi stepeništa u koje su ucrtana sjedišta. Širina jednog sjedišta je 55 cm. Naznačene su mjere, udaljenost od gledališta do pozornice, duljina gledališta te duljine prvog i posljednjeg reda.



1. Od koliko se redova sastoji gledalište?
2. Koliko sjedišta ima u prvom redu, a koliko u posljednjem redu?
3. Koliko sjedišta ima u ostalim redovima?
4. Koliki je ukupni broj sjedišta u teatru?
5. Kolika je površina cijelog teatra?

Zadatci 4.2.

1. Je li neki od sljedećih nizova aritmetički? Ako jest, napiši mu sljedeća dva člana:

1) $1, 2, 3, 4, \ldots;$ **2)** $2, 4, 8, 16, \ldots;$
3) $4, 2, 0, -1, \ldots;$ **4)** $3, 3, 3, 3, \ldots;$
5) $6, 0, 6, 0, \ldots;$ **6)** $12, 6, 0, -6, \ldots.$

2. Koji od sljedećih aritmetičkih nizova ima veću sumu prvih 10 članova?

1) $100,\ 105,\ 110, \ldots;$
2) $-1000,\ -750,\ -500, \ldots$?

3. U nizu 51, 48, 45,... odredi prvi član s negativnim predznakom.

4. Odredi prvi pozitivni član aritmetičkog niza -3, $-\frac{44}{15}$, $-\frac{43}{15}$,....

5. Koliko je prirodnih brojeva manjih od 500 koji su djeljivi s 11, a nisu djeljivi s 11^2?

6. Koliko je prirodnih brojeva manjih od 500 koji su djeljivi s 11 ili s 13 (ili s oba ta broja).

7. Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 5 000, a djeljivih s 19?

8. Je li niz s općim članom $a_n = 16 - 3n$ aritmetički? Koliki je zbroj njegovih prvih 100 članova?

9. Koliko članova aritmetičkog niza 9, 15, 21,... trebamo zbrojiti da suma bude veća od 560?

10. Zapiši, koristeći znak sumacije, zbroj prvih n članova nizova

1) 3, 9, 15, 21,...;
2) $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$ ....

— ◆ —

11. Napiši prvih pet članova aritmetičkog niza ako je:

1) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{4}$;
2) $a_1 = \frac{4}{5}$, $d = -0.2$;
3) $a_1 = 202$, $d = -\frac{3}{2}$;
4) $a_1 = 1\frac{3}{5}$, $d = 0.125$.

12. Dokaži da je niz (a_n) s općim članom a_n aritmetički:

1) $a_n = 2n - 7$; **2)** $a_n = \dfrac{3n+2}{5}$.

13. Je li broj 132 član aritmetičkog niza 7, 12,...? Je li broj 181 član aritmetičkog niza 1, 4,...?

14. Tijelo koje se giba niz kosinu prevalilo je u prvoj sekundi put od 2 m, a u svakoj sljedećoj 1.5 m više nego u prethodnoj. Koliki je put tijelo prevalilo nakon 10 sekundi?

15. Na dubini od 25 m prosječna temperatura Zemlje je $9°C$, a nakon toga na svaka 33 m dubine raste za $1°C$. Na kolikoj se dubini nalazi izvor termalne mineralne vode temperature $70°C$?

16. Niz (a_n) je aritmetički niz.

1) Ako je $a_6 = 16$, $a_8 = 22$, odredi a_{10}.
2) Ako je $a_{11} = 18$, $a_{13} = 8$, odredi a_9.
3) Ako je $a_7 = -5$, $a_{32} = 70$, koliki je a_{11}?
4) Ako je $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$, koliki je a_{13}?
5) Ako je $a_4 = 1$, $a_{332} = 2$, odredi a_{168}.

17. Odredi aritmetički niz ako je:

1) $a_1 + a_7 = 42$, $a_{10} - a_3 = 21$;
2) $a_5 + a_{11} = -0.2$, $a_4 + a_{10} = 2.6$;
3) $a_1 + a_5 = 24$, $a_2 \cdot a_3 = 60$;
4) $a_2 + a_3 + a_4 = 3$, $a_1 \cdot a_4 = -20$;
5) $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$, $a_2 \cdot a_3 = 28$;
6) $a_3^2 + a_7^2 = 122$, $a_1 + a_7 = 4$.

18. Odredi nepoznanicu x tako da tri broja: $\sqrt{x}$, $\sqrt{5x+4}$ i $\sqrt{12x+13}$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.

19. Odredi nepoznanicu x tako da brojevi $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{5x+9}$ i $\sqrt{12x+25}$ budu tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

20. Dokaži da su brojevi $\dfrac{1}{\log_3 2}$, $\dfrac{1}{\log_6 2}$, $\dfrac{1}{\log_{12} 2}$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

21. Za koje su realne vrijednosti broja x brojevi $\log 2$, $\log(2^x - 1)$, $\log(2^x + 3)$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza?

22. Za koji su x brojevi $1 + \sin x$, $\sin^2 x$, $1 + \sin 3x$ uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza?

23. Brojevi 1, x, y uzastopni su članovi aritmetičkog niza. Odredi x i y ako je $x^2 - 2 = 2y$.

24. Koliki je deveti član aritmetičkog niza ako je zbroj trostrukog trećeg i šesterostrukog dvanaestog jednak 81?

25. Odredi deseti član aritmetičkog niza, u kojem je zbroj trostrukog petog i peterostrukog trinaestog jednak 88.

26. Zbroj triju uzastopnih članova aritmetičkog niza iznosi 33. Njihov je umnožak jednak 1287. Odredi te brojeve.

27. Zbroj prvih triju članova aritmetičkog niza iznosi 27, a zbroj njihovih kvadrata jednak je 275. Koji je to niz?



28. Četiri broja čine aritmetički niz, a njihov je zbroj 20. Zbroj njihovih recipročnih vrijednosti iznosi $\frac{25}{24}$. Koji su to brojevi?

29. Zbroj četiriju brojeva što čine aritmetički niz jednak je 1, a zbroj njihovih kubova iznosi 0.1. Koji su to brojevi?

30. Četiri pozitivna broja uzastopni su članovi aritmetičkog niza s razlikom 2. Umnožak tih brojeva jednak je 19 305. Koji su to brojevi?

31. Članovi aritmetičkog niza su cijeli brojevi. Dokaži da je umnožak četiriju uzastopnih članova niza uvećan za četvrtu potenciju razlike niza, kvadrat cijelog broja.

32. Krajnji članovi aritmetičkog niza od 7 članova jednaki su 11 i 35. Koliko članova ima niz čiji su krajnji članovi 38 i 13 ako su četvrti članovi ovih nizova jednaki?

33. Dan je niz prirodnih brojeva većih od 1 koji nisu djeljivi niti s 2 niti s 3: 5, 7, 11, 13, 17,.... Napiši opći član tog niza.

34. Zbroj 7. i 15. člana aritmetičkog niza jednak je 18. Odredi 11. član ovog niza.

35. Ako je zbroj 2. i 10. člana aritmetičkog niza jednak 12, koliki je zbroj 4., 6. i 8. člana?

36. Koliki je zbroj prvih 17 članova aritmetičkog niza čiji je deveti član jednak 35?

37. U sljedećoj tablici zadana su tri podatka o aritmetičkom nizu. Izračunaj preostala dva.

	n	d	a_1	a_n	S_n
1)		5	4	54	
2)	14		-5	86	
3)			4	99	1030
4)	18	3	4		
5)		-4	4		180
6)	15		12		-135
7)	28	6		62	
8)		2		10	18
9)	21			155	945
10)	16	-4			1440

38. U aritmetičkom nizu je 12 članova. Zbroj onih na parnim mjestima je 186, a onih na neparnim 156. Kolika je razlika niza?

39. U nekom je aritmetičkome nizu $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{11} = 72$. Koliko je $a_1 + a_6 + a_{11}$?

40. Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza iznosi 750. Ako je prvi član niza 64, a razlika niza $d = -2$, koliki je n?

41. Koliko članova ima aritmetički niz ako je $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = 126$, $a_2 + a_{2n} = 42$?

42. Broj članova aritmetičkog niza je paran. Razlika zbroja članova na parnim i neparnim mjestima iznosi 6. Ako je posljednji član niza veći od prvog za 10.5, koliko članova ima ovaj niz?

43. U aritmetičkom je nizu $a_{m+n} = A$ i $a_{m-n} = B$. Odredi a_m i a_n.

44. Dokaži da je svaki član aritmetičkog niza, počevši od drugog, aritmetička sredina dvaju članova koji su od njega jednako udaljeni.

45. Dokaži da je u svakom aritmetičkom nizu $a_m + a_n = a_p + a_q$ ako i samo ako je $m + n = p + q$.

46. Pokaži da je aritmetička sredina prvog i posljednjeg člana aritmetičkog niza jednaka aritmetičkoj sredini svih njegovih članova.

47. U aritmetičkom nizu a_1, a_2, a_3,... je $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. Odredi S_{19}.

48. Odredi zbroj prvih 20 članova aritmetičkog niza ako je $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

49. Koliko je $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$ ako je niz a_1, a_2, a_3,... aritmetički te vrijedi $a_1 + a_4 + a_7 + \ldots + a_{16} = 147$?

— ◆ —

50. U aritmetičkom je nizu zbroj trećeg i sedmog člana jednak 10. Odredi zbroj prvih devet članova tog niza.

51. Riješi jednadžbu: $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdots 5^{2x} = (0.04)^{-28}$.

52. Riješi jednadžbe:

1) $2 + 5 + 8 + \ldots + x = 155$;

2) $1 - 5 - 11 - \ldots - x = -207$;

3) $x-1+x-3+\ldots+x-27 = 70$;

4) $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x-2}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x} = 3$.

53. Koliko pozitivnih članova ima niz 105, 98, 91, 84,... ?
Koliko članova ovog niza valja zbrojiti kako bi zbroj bio jednak nuli?

54. Izračunaj zbroj prvih 200 neparnih prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1.

55. Zbroj prvih pedeset članova aritmetičkog niza jednak je 200, a zbroj sljedećih 50 iznosi 2700. Odredi ovaj niz.

56. Razlika aritmetičkog niza s konačnim brojem članova jednaka je 2, a njegov zbroj iznosi 28. Prvi član jednak je broju članova niza. Koji je to niz?

57. Zbroj prvih triju članova aritmetičkog niza jednak je 15, zbroj posljednjih triju jednak je 78, a zbroj svih članova niza iznosi 155. Odredi taj niz.

58. Zbroj prvih četiriju članova aritmetičkog niza jednak je 68, zbroj posljednjih četiriju -36. Ako je zbroj svih članova niza jednak 68, odredi taj niz.

59. Koliki je zbroj prvih trinaest članova aritmetičkog niza ako je zbroj njegovih prvih šest članova s parnim indeksima jednak 90?

60. Za $n = 1, 2, \ldots, 10$ neka je A_n zbroj prvih 40 članova aritmetičkog niza s prvim članom n i razlikom $2n - 1$. Koliko je $A_1 + A_2 + \ldots + A_{10}$?

61. Odredi zbroj svih negativnih brojeva koji su članovi niza (a_n), $a_n = 1.5n - 48$.

62. Zadan je niz (a_n) tako da je $a_{n+1} = a_n + 1$, $a_1 = 2$. Odredi zbroj prvih 100 članova niza.

63. U aritmetičkom je nizu $a_n = \dfrac{1}{m}$, $a_m = \dfrac{1}{n}$. Odredi zbroj prvih mn njegovih članova.

64. Odredi zbroj prvih $m + n$ članova aritmetičkog niza ako je $a_m = n$, $a_n = m$.

65. Koji je član aritmetičkog niza 20, 18, 16,... jednak jednoj osmini zbroja svih prethodnih članova?

66. U kojem je aritmetičkom nizu zbroj n prvih članova jednak $\frac{1}{9}$ zbroja prvih $3n$ članova?

67. U aritmetičkim nizovima 17, 21, 25, 29,... i 16, 21, 26, 31,... ima jednakih članova. Ako redom ispišemo te članove, oni će činiti novi niz. Odredi zbroj prvih 100 članova tog niza.

68. Ako je zbroj prvih $3n$ prirodnih brojeva za 150 veći od zbroja prvih n prirodnih brojeva, koliki je zbroj prvih $4n$ prirodnih brojeva?

69. U aritmetičkom nizu (a_n) zbroj prvih n članova jednak je $S_n = 2n + 3n^2$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Kako glasi opći član niza?

70. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ zbroj S_n prvih n članova aritmetičkog niza jednak je $S_n = 4n^2 - 3n$. Odredi opći član niza.

71. Ako je zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak $4n^2$, odredi deseti član tog niza.

72. Odredi opći član aritmetičkog niza u kojem je zbroj prvih n članova tri puta veći od kvadrata broja tih članova.

73. Odredi aritmetički niz u kojem je $a_5 = 18$, a $S_n = \frac{1}{4} S_{2n}$.

— ◆ —

74. Između 1 i 1.3 treba umetnuti pet brojeva koji će s dvama zadanima činiti sedam uzastopnih članova rastućeg aritmetičkog niza.

75. Između 7 i 35 treba umetnuti šest brojeva koji će sa zadanim dvama činiti osam uzastopnih članova aritmetičkog niza.

76. Koliko brojeva treba umetnuti između 2 i 16 da bi se dobio aritmetički niz čiji je zbroj 180?

4.3. Geometrijski niz

Koje je svojstvo zajedničko sljedećim nizovima:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48\ldots \qquad 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162\ldots$$

$$18,\ 6,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9}\ldots \qquad -1,\ 2,\ -4,\ 8,\ -16\ldots?$$

U aritmetičkom je nizu razlika svakih dvaju susjednih članova konstantna. Ovdje vidimo primjere nizova u kojima je *količnik* dvaju uzastopnih članova konstantan. Opći član tih nizova (a_n) zadovoljava rekurzivnu formulu

$$a_n = q \cdot a_{n-1}.$$

Cijelo će poglavlje nalikovati prethodnom kako bismo istaknuli zajedničku ideju u definiciji ovih dviju vrsta nizova.

Geometrijski niz

Niz je **geometrijski** ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} =: q. \qquad (1)$$

Broj q naziva se **kvocijent** ili **količnik geometrijskog niza.**

Količnik niza ne može biti 0, jer je onda definicija besmislena. Ako je $q = 1$, onda je $a_n = a_{n-1}$ za svaki n i niz je konstantan.

Primjer 1. Ispišimo nekoliko prvih članova geometrijskog niza ako je zadan prvi član i kvocijent niza.

a_1	q	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
3	2	3	6	12	24	48
8	$-\frac{1}{2}$	8	-4	2	-1	$\frac{1}{2}$
70	0.1	70	7	0.7	0.07	0.007

Zadatak 1. Prepišite tablicu u bilježnicu i popunite kućice u sljedećim primjerima geometrijskog niza.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	5				
				4	6
		6	8		

O podrijetlu imena

Zbog čega se ovaj niz naziva *geometrijskim*? Vrijedi

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Ako su članovi niza pozitivni, onda slijedi

$$a_n = \sqrt{a_{n+1}a_{n-1}}.$$

Svaki član geometrijskog niza (osim prvog) geometrijska je sredina dvaju svojih susjednih članova. Odatle nizu ime.

Opći član geometrijskog niza

Formula za opći član geometrijskog niza lako se određuje iz

$$a_2 = a_1 \cdot q,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2,$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3.$$

Indukcijom dobivamo:

Opći član geometrijskog niza

Geometrijski niz s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima opći član

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (2)$$

Primjer 2. Za $a_1 = 1$ i $q = 2$ geometrijski niz glasi

$$1,\ 2,\ 4,\ 8\ldots$$

Njegov n-ti (opći) član je

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Zadatak 2. Količnik geometrijskog niza jednak je 3, a zbroj prvih četiriju članova iznosi 80. Odredi 5. član niza.

Primjer 3. Četiri su broja uzastopni članovi rastućeg geometrijskog niza. Zbroj dvaju krajnjih jednak je 9, dvaju srednjih 6. Odredimo te brojeve.

▶ Zapišimo jednadžbe: $a_1 + a_4 = a_1 + a_1q^3 = a_1(1+q^3) = 9$ i $a_2 + a_3 = a_1q + a_1q^2 = a_1q(1+q) = 6$.

Podijelimo ih: $\dfrac{a_1(1+q^3)}{a_1q(1+q)} = \dfrac{9}{6}$: Nakon kraćenja imamo jednadžbu s jednom nepoznanicom: $\dfrac{1-q+q^2}{q} = \dfrac{3}{2}$, odnosno $2q^2-5q+2=0$.

Ova jednadžba ima dva rješenja, $q=\frac{1}{2}$ ili $q=2$. Zbog toga će dva rješenja imati i sam zadatak:

1) Za $q=\dfrac{1}{2}$ nalazimo $a_1=8$ te imamo padajući niz $8, 4, 2, 1$.

2) Za $q=2$ je $a_1=1$ i imamo rastući niz $1, 2, 4, 8$.

Lako je provjeriti da oba niza brojeva zadovoljavaju uvjete zadatka.

Zbroj prvih n članova niza

Odredimo sad formulu za opći član niza parcijalnih suma (S_n) geometrijskog niza:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Iskoristimo formulu za opći član geometrijskog niza:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

i pomnožimo obje strane jednakosti s kvocijentom niza q:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n.$$

Oduzimanjem ovih dviju jednakosti dobivamo:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n,$$

odakle slijedi za $q \neq 1$

$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Ako je pak $q=1$, onda je niz konstantan i vrijedi $S_n = na_1$.

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza s kvocijentom $q \neq 1$ iznosi

$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}. \qquad (3)$$

Primjer 4.

Tvrtka *Dobra prodaja* naručila je od Marka Hakerića izradu *web*-stranice. Predviđeno vrijeme rada je 14 radnih dana, a *Dobra prodaja* nudi tri opcije plaćanja za svaki od tih 14 dana:

1) 1000 kuna po jednom radnom danu,

2) prvi dan 700 kuna, a svaki sljedeći 50 kuna više,

3) prvi dan 90 lipa, a svaki sljedeći dvostruko više.

Koju opciju plaćanja Marko treba prihvatiti?

Zarada u prvoj varijanti je 14 000 kn.

U drugoj opciji, niz je aritmetički s prvim članom $a_1 = 700$, razlikom $d = 50$ i ukupnim brojem članova $n = 14$. Ukupna isplata je

$$a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d = 14\,350 \text{ kn.}$$

U trećoj opciji, red je geometrijski s prvim članom $a_1 = 0.90$ i kvocijentom $q = 2$. Njegova je suma

$$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2^{14} - 1 = 14\,744.70 \text{ kn.}$$

Marko treba prihvatiti treću opciju (pod uvjetom da ne preskoči nijedan od tih radnih dana i da posao ne dovrši ranije).

Primjer 5.

Geometrijski niz zadan je svojim članovima: $a_{11} = 12$ i $a_{20} = 36$. Koliki je zbroj $a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{20}$?

Ovdje se radi o zbroju dijela geometrijskog niza. Odredimo mu kvocijent. Iz

$$a_{20} = a_{11} q^9$$

dobivamo

$$q^9 = \frac{a_{20}}{a_{11}} = \frac{36}{12} = 3,$$

te je $q = \sqrt[9]{3}$. U zadatku se traži razlika dviju suma, $S_{20} - S_{10}$. Prvi je dojam da ćemo morati odrediti nepoznate članove geometrijskog niza, posebice a_1, kako bismo koristili formulu za zbroj niza. Međutim, možemo razmišljati i ovako: zaboravimo da je riječ o *dijelu* geometrijskog niza. Za nas je to novi geometrijski niz s prvim članom 12, posljednjim 36 i kvocijentom q. Njegova je suma, prema (5), dana s:

$$S = \frac{a_{20} q - a_{11}}{q - 1} = \frac{\sqrt[9]{3} \cdot 36 - 12}{\sqrt[9]{3} - 1}.$$

Interpolacija geometrijskog niza

Neka su zadana dva člana geometrijskog niza, a i b. Trebamo odrediti r brojeva koji zajedno s a i b (kao prvim i posljednjim članom niza) čine geometrijski niz.

Niz će biti određen ako mu znamo kvocijent. Njegov prvi član je $a_1 = a$, a posljednji, n-ti $a_n = b$. Kako je $n = r + 2$, vrijedi:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \implies b = q^{r+1} a,$$

te je

$$q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Formula za zbroj članova geometrijskog niza može se napisati i u drugom obliku. Kako je $a_n = a_1 q^{n-1}$, vrijedi:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}, \tag{5}$$

što dalje možemo napisati ovako:

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1}. \tag{6}$$



Točno-netočno pitalice

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Geometrijski niz mora imati barem tri člana. T N

2. Kvocijent q geometrijskog niza mora biti racionalan broj. T N

3. Zbroj prvih n članova geometrijskog niza veći je od n-tog člana tog niza. T N

4. Niz $a_n = \dfrac{\pi}{2^n}$ je geometrijski. T N

5. U bilo kojem geometrijskom nizu vrijedi $a_n = \sqrt{a_{n-2} a_{n+2}}$. T N

6. Ako je kvocijent niza $q < 1$, onda je niz padajući. T N

7. Ako je kvocijent niza $q > 1$, onda je niz rastući. T N

8. Ako za dva uzastopna člana geometrijskog niza vrijedi $a_{n+1} > a_n$, onda je kvocijent niza $q > 1$. T N

Zadatci 4.3.

1. Je li neki od sljedećih nizova geometrijski? Ako jest, napiši mu sljedeća dva člana.

1) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$; **2)** $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ldots$;
3) $8,\ 4,\ 2,\ 0,\ldots$; **4)** $2,\ 4,\ 12,\ 48,\ldots$;
5) $1,\ 1.1,\ 1.11,\ 1.111,\ldots$;
6) $1,\ 1.1,\ 1.21,\ 1.331,\ldots$;
7) $5,\ 5,\ 5,\ 5,\ldots$; **8)** $9,\ 6,\ 4,\ 2\frac{2}{3}\ldots$.

2. Koji će od sljedećih geometrijskih nizova imati najveći deseti član?

1) $10\,000,\ 20\,000,\ 40\,000,\ 80\,000,\ldots$;
2) $100,\ 300,\ 900,\ 2700,\ldots$;
3) $1,\ 5,\ 25,\ 125,\ldots$?

3. Za dvanaesti član geometrijskog niza 4, 6, 9,... vrijedi

1) $a_{12} \approx 300$; **2)** $a_{12} \approx 346$; **3)** $a_{12} \approx 920$.

4. Odredi prvi član geometrijskog niza 10, 30, 90, 270,... koji je veći od 100 000.

— ◆ —

5. Zapiši prvih nekoliko članova geometrijskog niza ako je:

1) $a_1 = -6,\ q = \frac{1}{3}$;
2) $a_1 = 1,\ q = \frac{1}{2}$;
3) $a_1 = \sqrt{2},\ q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $a_1 = 1,\ q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

6. Odredi dvanaesti član geometrijskog niza $4, 6, 9\ldots$.

7. Odredi peti član geometrijskog niza:

1) $1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots$; **2)** $\sqrt{5},\ \sqrt[4]{5},\ 1,\ \ldots$;
3) $\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9},\ 3,\ \ldots$; **4)** $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[6]{2},\ \ldots$.

8. Ako je s a_n zapisan opći član geometrijskog niza, odredi:

1) a_{10}, ako je $a_3 = 8,\ a_5 = 32$;
2) a_6, ako je $a_2 = \frac{2}{3},\ a_4 = \frac{8}{27}$;
3) a_9, ako je $a_3 = 4,\ a_5 = 8$;
4) a_4, ako je $a_1 = 1,\ a_7 = \frac{64}{27}$;
5) a_4, ako je $a_3 = \frac{4-2\sqrt{3}}{4},\ a_5 = \frac{28-16\sqrt{3}}{16}$;
6) a_{11}, ako je $a_3 = \sqrt[6]{2},\ a_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Dokaži da je niz (a_n) geometrijski:

1) $a_n = -3 \cdot 2^n$; **2)** $a_n = \frac{\pi}{3^n}$.

10. U geometrijskom je nizu $a_1 = q = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$. Nađi modul dvadesetog člana ovog niza.

11. U geometrijskom je nizu $a_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $q = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Odredi $|a_{20}|$.

— ◆ —

12. Odredi x tako da brojevi $x+5$, $25-x$, $30+2x$ budu tri uzastopna člana geometrijskog niza.

13. Brojevi $1,\ x^2,\ x^2+72$ uzastopni su članovi geometrijskog niza s realnim članovima. Koji su to brojevi?

14. Za koje su x brojevi $\frac{1}{x+2},\ \frac{1}{x-2},\ \frac{1}{x-4}$ uzastopni članovi geometrijskog niza?

15. Za koje su vrijednosti realnog broja a brojevi $\log_4 9,\ \log_2 a,\ \log_5 2 \cdot \log_9 25$ u danom poretku uzastopni članovi nekog geometrijskog niza?

16. Odredi geometrijski niz ako je

1) $a_1 - a_2 = 35,\ a_3 - a_4 = 560$;
2) $a_4 - a_2 = 18,\ a_5 - a_3 = 36$;
3) $a_1 - a_3 + a_5 = -65,\ a_1 + a_7 = -325$;
4) $a_1 + a_4 = \frac{7}{16},\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}$;
5) $a_1 + a_2 + a_3 = 31,\ a_1 + a_3 = 26$;
6) $a_1 + a_2 + a_3 = 70,\ a_1 a_2 a_3 = 8\,000$.

17. Koliko je članova u geometrijskom nizu u kojem su prvi, drugi i posljednji član niza redom jednaki $4,\ 12$ i $2\,916$?

18. U geometrijskom je nizu drugi član za 5 veći od prvog, a četvrti za 30 veći od drugog. Koji je to niz?

19. Između 1 i 256 umetni tri broja tako da s dvama zadanima čine geometrijski niz.

20. Između brojeva 3 i $19\,683$ smjesti još sedam brojeva tako da svih devet čine geometrijski niz.

21. Od kojeg je člana u geometrijskom nizu -8, 4, -2, ... svaki sljedeći po apsolutnoj vrijednosti manji od 0.001?

22. Cijena računala iznosila je 6400 kn. Vrijednost mu svaki mjesec opada za 3%. Nakon kojeg će mjeseca njegova vrijednost bit manja od 1500 kn?



23. Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza jednak je 28, a zbroj triju sljedećih 3.5. Odredi osmi član u ovom nizu.

24. Zbroj triju uzastopnih članova geometrijskog niza iznosi 74, a zbroj njihovih kvadrata 1924. Koji su to brojevi?

25. U sljedećoj tablici zadana su tri podatka o geometrijskom nizu. Izračunaj preostala dva.

	n	q	a_1	a_n	S_n
1)		2	4	1 024	
2)	7		4	108	
3)			3	96	189
4)	5	2	2		
5)		2	8		4 088
6)	7	2		128	

26. Tri broja čine geometrijski niz. Njihov je zbroj 21, a zbroj njihovih recipročnih vrijednosti $\frac{7}{12}$. Odredi te brojeve.

27. Umnožak prvih triju članova geometrijskog niza jednak je 64, a njihova aritmetička sredina iznosi $\frac{14}{3}$. Odredi te brojeve.

28. U geometrijskom nizu od 7 članova zbroj prvih triju članova jednak je 26, a triju posljednjih 2106. Odredi niz.

29. Umnožak trećeg i devetog člana geometrijskog niza s pozitivnim članovima jednak je A. Koliko iznosi umnožak prvih 11 članova ovog niza?

30. Umnožak četvrtog i petog člana geometrijskog niza jednak je B. Koliko iznosi umnožak prvih osam članova tog niza?

31. Stranice pravokutnog trokuta uzastopni su članovi geometrijskog niza. Koliki je sinus najmanjeg kuta tog trokuta?

32. U posudu s 10 l čistog alkohola ulije se 1 l vode, a zatim izlije 1 l mješavine. Isti se postupak napravi ukupno pet puta. Kolika je nakon toga količina alkohola u posudi?



33. Zbroj drugog i četvrtog člana geometrijskog niza iznosi 30, a njihov je umnožak jednak 144. Odredi zbroj prvih devet članova ovog niza.

34. Zbroj prvih četiriju članova geometrijskog niza jednak je 30, a zbroj četiriju što slijede iznosi 480. Koliki je zbroj prvih 12 članova ovog niza?

35. Koliko članova ima geometrijski niz ako je $a_1 = 5$, $a_5 = 405$ a $S_n = 1820$.

36. U geometrijskom nizu s pozitivnim članovima je $S_2 = 4$, $S_3 = 13$. Odredi S_4.

37. U geometrijskom je nizu $S_3 = 40$, $S_6 = 60$. Koliko je S_9?

38. Zbroj prvih 11 članova geometrijskog niza čini 20% od zbroja jedanaest članova što slijede. Koliko je puta prvi član niza manji od jedanaestog?

39. Geometrijski niz ima paran broj članova. Zbroj svih članova niza 3 puta je veći od zbroja članova što stoje na parnim mjestima. Odredi količnik ovog niza.

40. Broj članova geometrijskog niza je paran. Zbroj svih članova niza tri puta je veći od zbroja članova s neparnim indeksima. Odredi količnik ovog niza.

41. Zbroj prvih n članova nekog geometrijskog niza izračunava se po formuli $S_n = 3(2^n - 1)$, za svaki n. Odredi peti član ovog niza.

42. Odredi zbroj: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$, $x \neq 0$.

43. Imamo niz 1, $(1+2)$, $(1+2+2^2)$, ..., $(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})$. Koliki je zbroj prvih n članova ovog niza?

44. Izračunaj zbroj n brojeva oblika 1, 11, 111,. . . .

45. Niz kvadrata članova geometrijskog niza i sam je geometrijski niz. Dokaži!

46. U geometrijskom je nizu $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$. Nađi a_m i a_n.

47. Dokaži: ako su a, b i c n–ti, m–ti i k–ti član jednog geometrijskog niza, onda je $a^{m-k}\cdot b^{k-n}\cdot c^{n-m}=1$.

48. U geometrijskom nizu vrijedi $a_m\cdot a_n=a_u\cdot a_v$ ako i samo ako je $m+n=u+v$. Dokaži! Koja je analogna tvrdnja vrijedila za aritmetički niz?

49. Ako je u geometrijskom nizu $a_2\cdot a_4\cdot a_6\cdots a_{16}=16$, koliko je a_9?

50. Ako je četvrti član geometrijskog niza jednak 3, koliki je umnožak prvih sedam članova toga niza?

51. Zbroj logaritama po bazi 2 devet uzastopnih članova geometrijskog niza jednak je 3. Koliki je umnožak krajnjih od tih devet članova?

52. Zbroj dekadskih logaritama sedam uzastopnih članova geometrijskog niza jednak je 1.75. Koliki je umnožak krajnjih od tih sedam članova?

— ◆ —

53. Tri broja, treći je 12, uzastopni su članovi geometrijskog niza. Ako se 12 zamijeni s 9, ti će brojevi biti uzastopni članovi aritmetičkog niza. Koji su to brojevi?

54. Tri broja čiji je zbroj 21 čine aritmetički niz. Ako drugom oduzmemo 1, a trećem dodamo 1, dobit ćemo tri broja koji čine geometrijski niz. Koji su to brojevi?

55. Zbroj prvih triju članova rastućeg aritmetičkog niza jednak je 15. Ako od prvih dvaju oduzmemo po 1, a trećem dodamo 1, dobit ćemo tri uzastopna člana geometrijskog niza. Odredi zbroj prvih deset članova aritmetičkog niza.

56. Zbroj triju brojeva koji čine geometrijski niz iznosi 28. Ako se najveći umanji za 4, dobit će se tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Koji su to brojevi?

57. Prvi članovi aritmetičkog i geometrijskog niza jednaki su 2, treći članovi su međusobno jednaki, a drugi se razlikuju za 4. Nađi ove nizove ako su im članovi pozitivni brojevi.

58. Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza jednak je 42. Ti su isti brojevi prvi, drugi i šesti član rastućeg aritmetičkog niza. Nađi te brojeve.

59. Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza iznosi 91. Ako im dodamo redom 25, 27 i 1, dobijemo tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Odredi sedmi član u geometrijskom nizu.

60. Tri broja čiji je zbroj jednak 114 uzastopni su članovi geometrijskog niza ili prvi, četvrti i dvadesetpeti član aritmetičkog niza. Nađi te brojeve.

61. Od četiriju brojeva prva su tri uzastopni članovi geometrijskog, a posljednja tri aritmetičkog niza. Zbroj krajnjih članova jednak je 32, a zbroj srednjih 24. Koji su to brojevi?

62. Nađi četiri broja od kojih prva tri čine geometrijski, a posljednja tri aritmetički niz. Zbroj krajnjih članova jednak je 14, a srednjih 12.

63. Tri broja čine geometrijski niz. Ako drugi uvećamo za 8, niz postaje aritmetički, a ako zatim posljednji uvećamo za 64, niz što se dobije opet je geometrijski. Odredi te brojeve.

64. Tri realna broja različita od nule čine aritmetički niz. Kvadrati tih brojeva u istom poretku uzastopni su članovi geometrijskog niza. Odredi sve moguće kvocijente tih geometrijskih nizova.

65. Prvi, treći i peti član geometrijskog niza istovremeno su prvi, četvrti i šesnaesti član nekog aritmetičkog niza. Odredi te nizove ako je prvi član obaju nizova jednak 5.

66. U geometrijskom je nizu drugi član jednak 8, a peti 512. Napiši aritmetički niz u kojem je razlika dva puta manja od količnika geometrijskog niza, a da zbrojevi prvih triju članova u oba niza budu jednaki.

67. U aritmetičkom nizu s 11 članova, prvi, peti i jedanaesti su uzastopna tri člana nekog geometrijskog niza. Napiši aritmetički niz ako je njegov prvi član 24.

68. Prvi član aritmetičkog niza jednak je 1, a zbroj prvih devet članova iznosi 369. Ako su prvi i deveti član ovog niza ujedno prvi i deveti član nekog geometrijskog niza, odredi sedmi član geometrijskog niza.

4.4. Limes niza. Teoremi o limesima

Najčešće pitanje koje se postavlja pri promatranju beskonačnog niza (x_n) jest: *što se događa s njegovim članovima* x_n *za velike vrijednosti broja* n?

Primjer 1.

Neka je $x_n = \dfrac{1}{10^n}$. Prvih nekoliko članova niza su

$$x_1 = 0.1, \quad x_2 = 0.01, \quad x_3 = 0.001, \quad x_4 = 0.0001 \ldots$$

Svaki je sljedeći član deset puta manji od prethodnog. Vidimo da se članovi ovog niza približavaju nuli.

Primjer 2.

Neka je $a_n = \dfrac{1}{n}$. Članovi ovog niza su

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2} = 0.5, \ldots, a_{10} = \frac{1}{10} = 0.1 \ldots$$

$$a_{100} = 0.01, \ldots,\ a_{1000} = 0.001 \text{ itd}$$

Svaki sljedeći član manji je od prethodnog, a veći od nule. Usporedbom s prethodnim primjerom ponovno vidimo da će i članovi ovog niza težiti nuli, istina, sporije nego u tom primjeru.

Tvrdnju da članovi niza teže nuli označavamo na sljedeći način:

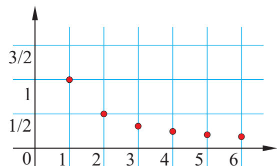
$$\lim x_n = 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

(čita se: limes[2] niza (x_n) jednak je nuli kad n teži u beskonačnost), ili

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

ili kratko $$x_n \to 0 \qquad (\text{kad } n \to \infty).$$

Primjer 3.



Neka je $x_n = \dfrac{n-1}{n}$. Ispišimo neke njegove članove:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}, \ \ldots,\ x_{10} = \frac{9}{10} = 0.9 \ldots$$

$$x_{1000} = \frac{999}{1000} = 0.999 \text{ itd.}$$

Primjećujemo da se članovi ovoga niza približavaju broju 1.

Izračunajmo udaljenost između broja 1 i općeg člana niza:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Kad n teži u beskonačnost, ova razlika, prema prethodnom primjeru, teži nuli.

[2] *limes* (lat.) = granica

Pojam limesa jedan je od temeljnih pojmova matematičke analize. Iako je intuitivno jasan, potrebno ga je precizno definirati da bi se ispravno shvatio.

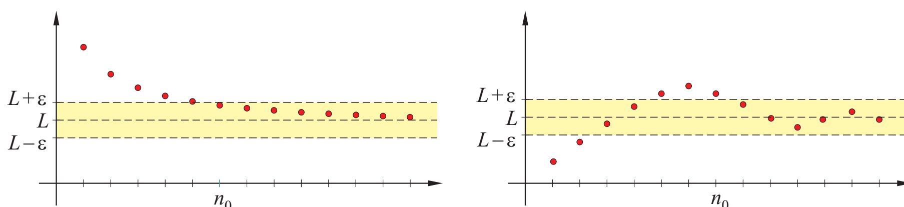
Limes niza

Kažemo da je realni broj a limes niza (x_n) ako za svaki (ma kako malen) broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da za sve $n > n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Niz je **konvergentan** ako ima limes. Inače je **divergentan**.

Konvergentan niz ima samo jedan limes, broj a u ovoj definiciji je jednoznačno određen.



Prikazani su konvergentni nizovi. Počevši od nekog, svi članovi niza nalaze se unutar ε-pruge.

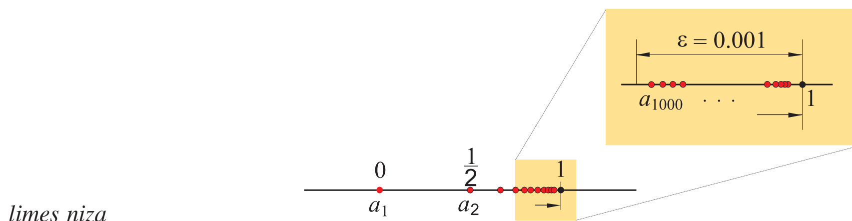
Provjerimo da niz $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ uistinu ima limes 1. To činimo na sljedeći način. Zamislimo po volji malen broj ε i napišimo nejednakost (1). Radi jednostavnosti u prvom ćemo primjeru uzeti konkretnu vrijednost broja ε, recimo $\varepsilon = 0.001$

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < 0.001\ .$$

Pitamo se za koje je prirodne brojeve n ona ispunjena? Stavimo $n_0 = 1000$. Čim je $n > n_0$, imamo

$$n > 1000 \iff \frac{1}{n} < 0.001$$

i za takve n ispunjena je nejednakost (1). Dakle, udaljenost broja 1 do članova niza je, počevši od člana x_{1001}, manja od 0.001.



limes niza

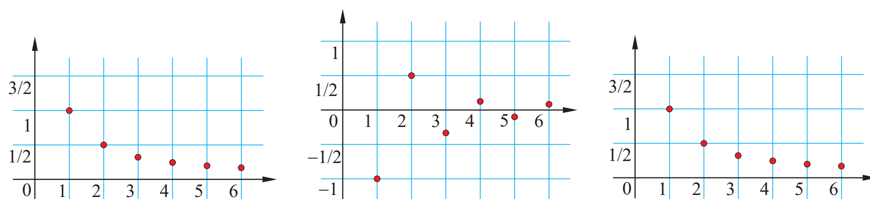
Smanjimo li ε, morat ćemo otići dalje u nizu da bi nejednakost (1) vrijedila. Primjerice, ako je $\varepsilon = 0.00001$, tada će $|x_n - 1|$ biti ispunjeno tek za $n > n_0 = 100\,000$. Općenito, za po volji uzet ε vrijedit će $|x_n - 1| < \varepsilon$ tek za $n > n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$.

Primjer 4. Neka je $x_n = (-1)^n n$. Članovi su ovog niza redom -1, 2, -3, 4, $-5, \ldots$. On nema limesa pa je divergentan.

Primjer 5. Kazali smo da (x_n) teži nuli ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. To znači da udaljenost $|x_n - 0|$ može biti po volji malena. No ta je udaljenost apsolutna vrijednost $|x_n|$ člana niza. Dakle, niz teži nuli onda i samo onda ako niz apsolutnih vrijednosti teži nuli:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Evo nekoliko primjera takvih nizova: $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $x_n = \dfrac{1}{n^p}$ za $p > 0$. Njihovi su grafovi nacrtani na slici.



Pojam niza koji teži nuli je važan jer se svaki konvergentni niz može svesti na takav niz. Naime, ako niz (x_n) ima limes a, onda po samoj definiciji limesa vrijedi

$$|x_n - a| \to 0 \qquad \text{kad } n \to \infty,$$

no to znači da $(x_n - a)$ teži k nuli. Ovo temeljno svojstvo možemo zapisati na još jedan način koji je koristan pri nalaženju limesa niza.

Svojstvo limesa

Za konvergentni niz (x_n) vrijedi

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \iff \lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0. \tag{2}$$

Kažemo da niz (x_n) neograničeno raste (ili da teži u $+\infty$) ako su mu članovi, počevši od nekog, veći od unaprijed zadanog broja. Primjer neograničeno rastućeg niza je $x_n = n^2$. Za nj vrijedi:

$$\begin{aligned}
x_n &> 100, && \text{čim je } n > 10,\\
x_n &> 1000, && \text{čim je } n > 31,\\
x_n &> 10\,000, && \text{čim je } n > 100,\\
x_n &> 100\,000, && \text{čim je } n > 316, \text{ itd.}
\end{aligned}$$

Općenito, za ma kako velik broj M vrijedit će

$$x_n > M \qquad \text{čim je } n > \sqrt{M}.$$

Neograničeno rastući nizovi

Niz (x_n) **neograničeno raste** ako za svaki broj $M > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $x_n > M$ čim je $n > n_0$. Niz koji neograničeno raste *ne konvergira*. Međutim, po dogovoru pišemo:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

i kažemo da niz (x_n) teži u beskonačnost.

Teoremi o limesima

Kombinirajući dva ili više nizova, dobivamo složenije nizove čiji limes nije jednostavno računati po definiciji. No, tu su nam od velike koristi *teoremi o limesima*. Njihov strogi dokaz ostavit ćemo visokoškolskoj matematici, ali ćemo ih ilustrirati nizom primjera.

Teoremi o limesima

Neka su (x_n) i (y_n) konvergentni nizovi. Tada vrijedi

teorem o limesu zbroja (razlike):

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{3}$$

teorem o limesu umnoška:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)\cdot\big(\lim_{n\to\infty} y_n\big), \tag{4}$$

teorem o limesu kvocijenta. Ako je $y_n \neq 0$ za svaki n i $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, onda je:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} \tag{5}$$

teorem o limesu potencije. Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, onda je:

$$\lim_{n\to\infty} {x_n}^{y_n} = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)^{\lim_{n\to\infty} y_n} \tag{6}$$

monotonost limesa. Ako je $x_n \leqslant y_n$ ili $x_n < y_n$ za svaki n, onda je:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{7}$$

Dokažimo sljedeću tvrdnju, koju ćemo koristiti u mnogim primjerima:

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, onda vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji malen broj i stavimo $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Kako je niz (x_n) neograničeno rastući, postoji broj n_0 takav da za $n > n_0$ vrijedi $x_n > M$. No, tada je $\dfrac{1}{x_n} < \dfrac{1}{M} = \varepsilon$, što znači da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

Primjer 6.

Konstantni niz. Niz (x_n) čiji su svi članovi jednaki istom realnom broju c nazivamo konstantnim nizom. On je očito konvergentan i limes mu je c, jer je $|x_n - c| = 0$ za svaki n.

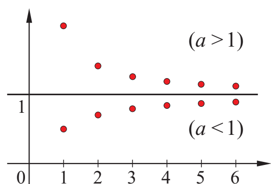
Po teoremu o zbroju i umnošku limesa, u kojem ćemo za (y_n) uzeti konstantni niz, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + c) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} c = \lim_{n\to\infty} x_n + c,$$

kao i

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = \big(\lim_{n\to\infty} c\big)\cdot\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = c\cdot\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Primjer 7.



Neka je $a > 0$ i (x_n) niz definiran $x_n = \sqrt[n]{a}$. Pokažimo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

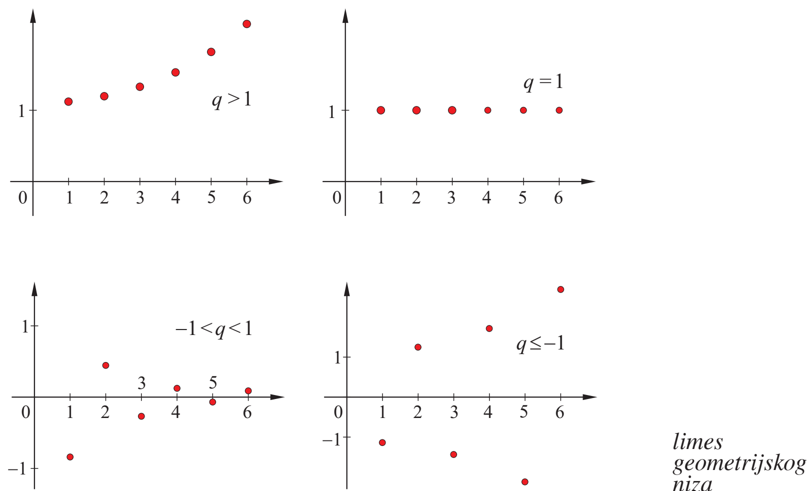
Prema teoremu o limesu potencije, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = a^0 = 1.$$

Za geometrijski niz (q^n) vrijedi:

Limes geometrijskog niza

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{za } q > 1, \\ 1, & \text{za } q = 1, \\ 0, & \text{za } -1 < q < 1, \\ \text{ne postoji}, & \text{za } q \leqslant -1. \end{cases}$$



limes geometrijskog niza

Dokaz. Najprije promotrimo slučaj $q > 1$. Napišimo $q = 1 + h$, gdje je $h > 0$. Po Bernoullijevoj nejednakosti vrijedi:

$$q^n = (1+h)^n \geqslant 1 + nh > nh.$$

Kad $n \to \infty$, imamo $nh \to \infty$. Zato je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Neka je sad $0 < q < 1$. Stavimo $p = \dfrac{1}{q} > 1$, pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} p^n} = 0$$

jer niz u nazivniku neograničeno raste.

Za $q = 0$ i $q = 1$ niz je konstantan i limes mu je 0, odnosno 1.

Za $-1 < q < 0$ vrijedi $0 < |q| < 1$ i $|q^n| = |q|^n$, pa kako $(|q|^n)$ teži nuli, odatle slijedi da i (q^n) teži nuli.

Ako je $q = -1$, niz izgleda ovako: $-1,\ 1,\ -1,\ 1\ldots$ i nema limesa.

Ako je $q < -1$, onda $|q^n| \to +\infty$, a sam niz divergira jer su mu uzastopni članovi različitih predznaka. Na primjer, za $q = -2$ prvih nekoliko članova niza su $-2,\ 4,\ -8,\ 16$ itd.

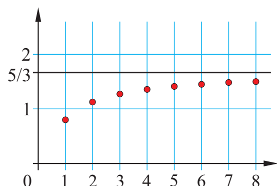
Računanje limesa

Ilustrirajmo na nekoliko primjera kako se računaju limesi.

Primjer 8.

Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-1}{3n+2}$.

Iskoristit ćemo teorem o dijeljenju limesa, međutim, ne neposredno jer su nizovi u brojniku i nazivniku neograničeni. (Kažemo da je ovaj limes neodređeni oblik tipa $\dfrac{\infty}{\infty}$.) Zato najprije moramo brojnik i nazivnik razlomka podijeliti s n, a onda koristiti poznati limes $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$:



$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \frac{5}{3}.$$

Primjer 9.

Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n+2}{2n^3-n^2+1}$.

Računajući na isti način kao i u prošlom primjeru, nakon dijeljenja s n^3 dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+2}{2n^3-n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Zadatak 1. Izračunaj **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{3n+2}$, **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-3n-1}{3-n+2n^2}$.

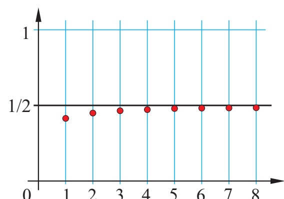
Zadatak 2. Izračunaj **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right]$.

Primjer 10. Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

Oba člana, i $\sqrt{n^2+n}$ i n teže u beskonačnost kad $n\to\infty$. (Kažemo da je ovaj limes neodređeni izraz tipa $\infty-\infty$.) Računamo ovako:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \left[\begin{matrix}\text{Dijelimo brojnik}\\ \text{i nazivnik s } n\end{matrix}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$



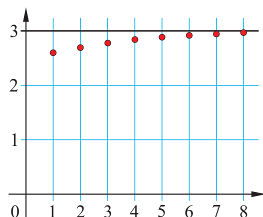
Vrijednost prvih nekoliko članova niza skicirana je na slici lijevo.

Zadatak 3. Izračunaj **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$, **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})$.

Primjer 11. Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

Potencija 3^n raste brže nego 2^n. Nakon dijeljenja brojnika i nazivnika s 3^n, možemo zapisati

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}.$$



Primijenimo li sad teoreme o limesu kvocijenta te teorem o limesu geometrijskog niza: za $|q|<1$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, dobivamo da je traženi limes jednak 3.

Zadatak 4. Izračunaj **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$, **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right]$.

Kutak plus

FIBONACCIJEV NIZ, ZLATNI REZ i MISTERIJ NESTALOG KVADRATIĆA

Niz

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21\ldots$$

naziva se **Fibonaccijev niz**. On je zadan rekurzivnom formulom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 3, \qquad F_1 = 1, \quad F_2 = 1.$$

Niz je dobio ime po talijanskom matematičaru Fibonacciju (Leonardo is Pise) ($\approx 1170.$ – $\approx 1240.$).

1. Matematičkom indukcijom dokaži **Cassinijev identitet**:

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n.$$

2. Promotrimo kvocijente $q_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$:

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8}\ldots$$

Na temelju rezultata iz 1) dokaži da je (q_{2n-1}) rastući, a (q_{2n}) padajući niz.

3. Dokaži na temelju toga da je (q_n) konvergentan. Rekurzivnu relaciju za Fibonaccijev niz možemo napisati u ovom obliku:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\dfrac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Dokaži da je limes ovog kvocijenta jednak **zlatnom rezu**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

4. Matematičkom indukcijom dokaži da je n-ti član Fibonaccijeva niza zadan formulom

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Primjenom znanja o geometrijskom nizu, izvedi odavde rezultat u 3).

5. Dokaži formulu:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots \, \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$$

6. Koristeći Cassinijeve identitete za $n = 5$ i $n = 6$: $8 \cdot 3 = 5^2 - 1$, odnosno $13 \cdot 5 = 8^2 + 1$, objasni način slaganja sljedećih dobro poznatih zagonetki o nestalom kvadratiću:

$25 \overset{?}{=} 24$

$64 \overset{?}{=} 65$

7. Napiši Cassinijev identitet za $n = 7$ i nacrtaj odgovarajuću sliku s nestalim kvadratićem u kvadratu 13×13.

8. Dokaži sljedeće identitete:

$$F_{n+2} = F_0 + F_1 + \ldots + F_n + 1$$
$$F_{2n} = F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1}$$
$$F_nF_{n+1} = F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2$$
$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n-1}F_{n+2}$$
$$F_{3n} = F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3$$

O Fibonaccijevu nizu napisano je na tisuće stranica teksta. Mnogi zanimljivi detalji i bezbrojne poveznice na druge stranice mogu se naći na prvoj od oko 24 700 000 stranica koje u ovom trenutku pronalazi Google tražilica na upit **Fibonacci**:

`http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/fib.html`

Zadatci 4.4.

1. Dokaži da je broj 1 limes niza (a_n), $a_n = \dfrac{n+1}{n}$.

2. Ako je $a_n = \dfrac{1-n}{n+2}$, dokaži da je limes niza (a_n) jednak -1. Za koje je n ispunjeno $|a_n + 1| < 0.001$?

3. Dokaži da je broj a limes niza (a_n) ako je

1) $a_n = \dfrac{1}{n+2}$, $a = 0$; 2) $a_n = \dfrac{n+2}{n-1}$, $a=1$;

3) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $a = 0$; 4) $a_n = \dfrac{3-n^2}{n^2+1}$, $a=-1$.

4. Računajući po definiciji pokaži da je limes niza (x_n), $x_n = \dfrac{3-2n}{n+1}$ jednak -2.

5. Računajući po definiciji dokaži:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n} = 1.5$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

6. Dokaži da sljedeći nizovi nisu konvergentni:

1) $a_n = 1 + (-1)^n$; 2) $a_n = 1 + \sin\dfrac{n\pi}{4}$;

3) $a_n = 2^n - n$; 4) $a_n = 1 - n + n^2$.

7. Dokaži da su sljedeći nizovi divergentni:

1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$; 2) $a_n = n + (-1)^n$;

3) $a_n = (-1)^n n$; 4) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$;

5) $a_n = n + (-1)^n(n-1)$.

— ◆ —

8. Izračunaj:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{2n-5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{5n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-7n}{2n-7}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{3-4n}$.

9. Izračunaj graničnu vrijednost (limes) sljedećih nizova:

1) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$;

2) $a_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n} - 3$;

3) $a_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{5n^2 + n - 1}$;

4) $a_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{1 + n - n^2}$;

5) $a_n = \dfrac{1-2n}{3n^2 - n - 2}$;

6) $a_n = \dfrac{(n^2-n+1)(n^2-n-1)}{2n(1-n^3)}$;

7) $a_n = \dfrac{1-3n}{2+3.5n} \cdot \dfrac{2n^2-n+4}{3n-0.8n^2}$;

8) $a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$;

9) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$;

10) $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)!}$.

10. Izračunaj limes niza kojemu je opći član:

1) $a_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$;

2) $a_n = \dfrac{3n^2+5n+1}{2n^2-n+5}$;

3) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}$;

4) $a_n = \dfrac{\sqrt{3n^3-2n}+n}{n^2+n}$;

5) $a_n = \dfrac{2^n+3^n+0.5^n}{2^n-3^n+0.5^n}$;

6) $a_n = \dfrac{2^{n-2}}{2^n-2}$;

7) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

11. Odredi limes sljedećih nizova:

1) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$; 2) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$;

3) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$; 4) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{2n^3+1}}{\sqrt{2n^2-1}}$;

5) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

6) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$;

7) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$;

8) $a_n = \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}$;

9) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-2}{n+\sqrt{n}+1}$;

10) $a_n = \sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2-n}$.

12. Odredi limes sljedećih nizova:

1) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$;

2) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n}$;

3) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}$;

4) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}$;

5) $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$.

13. Odredi limes sljedećih nizova:

1) $a_n = \dfrac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$; 2) $a_n = \dfrac{3^{n-1}}{3^n-2}$;

3) $a_n = \dfrac{2^n-3^n}{4^n-6^n+9^n}$;

4) $a_n = \dfrac{2^{1/n}-1}{2^{1/n}+1}$;

5) $a_n = \sqrt[n]{1+2^n}$; 6) $a_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$;

7) $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{n^2+2\cdot 3^n}$; 8) $a_n = \dfrac{2\cdot 3^n+1}{2-5\cdot 3^n}$;

9) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$;

10) $a_n = \dfrac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n}$;

11) $a_n = \dfrac{(2n+1)^5-(n+1)^5}{(2n+1)^5+(n-1)^5}$.

14. Izračunaj:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^2(n+2)}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n+n^2)}{n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\cos n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sin n}{2n+\sin n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{1}{n+2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}\dfrac{3}{n}$.

4.5. Limes monotonih nizova

U mnogim se primjerima limes niza ne može jednostavno izračunati, čak niti primjenom teorema o limesima. Postoje također situacije kad nas ne zanima *koliki* je neki limes, već samo *da li on postoji*. Stoga je korisno upoznati uvjete uz koje smo sigurni da će neki niz imati limes.

Najjednostavniji su primjeri takvih nizova **monotoni omeđeni** nizovi.

Monotoni i omeđeni nizovi

Rastući i padajući nizovi

Za niz (x_n) kažemo da je **rastući** ako za svaki n vrijedi $x_n \leqslant x_{n+1}$.

Niz (x_n) je **padajući** ako za svaki n vrijedi $x_n \geqslant x_{n+1}$.

Rastuće i padajuće nizove jednim imenom zovemo **monotonim** nizovima.

Primjer 1.

Niz s općim članom $x_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ je rastući.

Niz s općim članom $y_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ je padajući.

Proučimo razliku dvaju uzastopnih članova ovih nizova:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+4} - \frac{n+1}{n+3} = \frac{2}{(n+4)(n+3)} > 0$$

pa je prvi niz rastući. Za drugi niz vrijedi

$$y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{n^2+2n+2} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{-n^2-n-1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0$$

i ovaj niz je padajući.

Zadatak 1. Provjerite da su sljedeći nizovi (a_n) rastući:

$$a_n = \frac{n-1}{n}, \qquad b_n = n^2, \qquad x_n = 2^n,$$

a ovi opadajući:

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad y_n = 2^{-n}, \qquad a_n = -n^2.$$

Omeđeni nizovi

Niz (x_n) je omeđen ako postoje brojevi m i M takvi da za svaki n vrijedi
$$m \leqslant x_n \leqslant M.$$
Broj M se naziva **gornja**, a broj m **donja međa**.

Primjer 2.

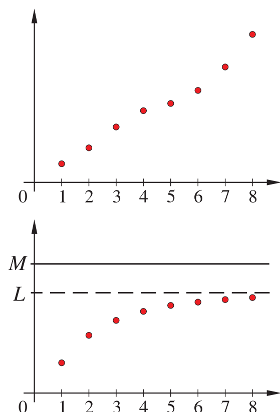
Niz (x_n), $x_n = \dfrac{n-1}{n}$ je omeđen. Da je on omeđen odozdo, očito je jer je rastući. Donja međa je, primjerice, $m = 0$. Gornja međa je, primjerice, broj $M = 1$, jer vrijedi
$$x_n = \frac{n-1}{n} < 1, \quad \text{za svaki } n.$$
Važno je primijetiti da je svaki broj veći od 1 također gornja međa. Među svim gornjim međama, $M = 1$ je *najmanja moguća*, jer niti jedan broj manji od 1 nije gornja međa ovog niza.

Da bismo dokazali omeđenost, nismo dužni pronalaziti *najmanje*, već *bilo kakve* gornje međe, što je puno lakši zadatak.

Limes monotonih nizova

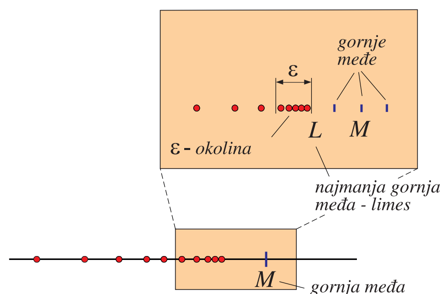
Monotoni nizovi imaju vrlo jednostavno ponašanje. Promotrimo slučaj rastućeg niza (za padajući vrijedi identično razmišljanje).

Ako je niz (x_n) rastući, tada su moguće samo dvije situacije:



1. niz nije omeđen. Tada on neograničeno raste pa je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$,

2. niz je omeđen. U tom slučaju postoji gornja međa M skupa $S = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$, koju ne može premašiti nijedan član niza. Budući da su njegovi članovi rastući, oni moraju težiti nekom broju. Taj je broj upravo *najmanja gornja međa* L, odnosno *supremum* skupa S.



Omeđen rastući niz ima limes. Njegovi članovi ne mogu premašiti među M.

Tvrdimo da je limes rastućeg monotonog niza jednak supremumu skupa S. (Slično tome, padajući omeđeni niz ima limes koji je jednak infimumu skupa S.)

Dokažimo to. Neka je L supremum skupa S. Jer je L najmanja gornja međa, za bilo koji $\varepsilon > 0$ broj $L - \varepsilon$ više nije gornja međa skupa S. To znači da postoji član niza x_{n_0} za koji vrijedi $x_{n_0} > L - \varepsilon$ tj $L - x_{n_0} < \varepsilon$. Sad iskoristimo dvije činjenice:

1. niz je rastući, pa je $x_{n_0} < x_n$ za svaki $n > n_0$,

2. niz je omeđen i L mu je gornja međa, pa je $x_n < L$ za svaki n.

Zaključujemo da se za svaki $n > n_0$ članovi niza nalaze *uklopljeni* između x_{n_0} i L, pa vrijedi

$$|x_n - L| = L - x_n < L - x_{n_0} < \varepsilon,$$

što pokazuje da je L limes niza (x_n).

Time smo dokazali sljedeći važan teorem.

Konvergencija monotonih nizova

Ako je niz monoton i omeđen, onda on konvergira.

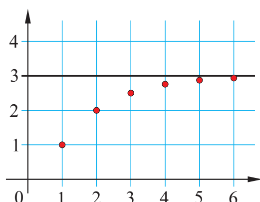
Pokažimo kolika je snaga ove tvrdnje o konvergenciji monotonog i omeđenog niza. Vidjet ćemo da s pomoću nje možemo ne samo dokazivati konvergenciju, već i računati limese nekih nama korisnih nizova.

Primjer 3.

Pokažimo da je niz definiran rekurzivnom formulom

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{2}, \qquad a_1 = 1,$$

konvergentan i izračunajmo mu limes.



Nekoliko prvih članova niza su: $1, 2, \frac{5}{2}, \frac{11}{4} \dots$ Pokažimo da je niz omeđen odozgo, i da mu je međa broj 3. Vidimo da ta tvrdnja vrijedi za početne vrijednosti od n. Pretpostavimo onda da je $a_n < 3$. Tada vrijedi

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3) < \frac{1}{2}(3 + 3) = 3$$

i time je omeđenost dokazana. Pokažimo sad da je niz rastući:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + 3) - a_n = \frac{1}{2}(3 - a_n) > 0.$$

Zato je niz konvergentan. Neka je L njegov limes. Onda vrijedi, kad $n \to \infty$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3) \implies L = \frac{1}{2}(L + 3)$$

i odavde je $L = 3$.

Primjer 4. Pokažimo da je niz određen s

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(x_n+\frac{2}{x_n}\Big),\qquad x_1=2$$

padajući i izračunajmo mu limes.

▶ Promotrimo razliku

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\cdot x_n+\frac{1}{x_n}-x_n=\frac{2-x_n^2}{2x_n}.$$

Niz će biti padajući ako je $2-x_n^2<0$, tj. $x_n^2>2$. To je istina jer prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju brojeva uvijek vrijedi

$$x_n=\frac{1}{2}\Big(x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}}\Big)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{2}{x_{n-1}}}=\sqrt{2},$$

pa je $x_n^2>2$. Također, ovim smo pokazali da je niz omeđen odozdo. Zato postoji njegov limes, koji ćemo označiti s a. Iz $x_n\to a$ slijedi

$$a=\frac{1}{2}\Big(a+\frac{2}{a}\Big)\implies a^2=2.$$

Zato je traženi limes jednak

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a=\sqrt{2}.$$

Napomena. Neka je $c>0$. Neka je $x_1>0$ po volji odabran i

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(x_n+\frac{c}{x_n}\Big).$$

Ovaj niz konvergira vrlo brzo prema broju $\sqrt{c}$. To je razlog zašto se na praktički svim džepnim računalima uz tipke za četiri osnovne aritmetičke operacije nalazi i tipka za računanje drugog korijena, jer se on određuje na ovaj način. Izračunajmo, primjerice, iteracije za broj $\sqrt{3}$, uzevši $c=3$ i na pr. $x_1=2$.

n	x_n
1	2
2	1.75
3	1.73214
4	1.732050810
5	1.732050808

Limes ne ovisi o izboru početne vrijednosti. Izaberite neku drugu početnu vrijednost x_1 i usporedite rezultate.

Primjer 5.

Promotrimo niz x_n definiran ovako:

$$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

(n korijena). Pokažimo da je ovaj niz konvergentan i izračunajmo mu limes.

▶ Niz je zadan rekurzivnom formulom

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}, \qquad x_1 = \sqrt{2}.$$

Računajući prvih nekoliko vrijednosti dobit ćemo

$$x_1 = \sqrt{2} = 1.41,$$
$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1} = 1.85,$$
$$x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+x_2} = 1.961,$$
$$x_4 = \sqrt{2+x_3} = 1.9903,$$
$$x_5 = \sqrt{2+x_4} = 1.9975.$$

Ovi iznosi sugeriraju da je niz (x_n) rastući i da mu je 2 vjerojatni limes. Dokažimo obje tvrdnje. Da je niz rastući, dokazujemo indukcijom. Baza:

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1.$$

Pretpostavimo da vrijedi $x_n > x_{n-1}$. Tada, dodavajući broj 2 na obje strane, dobivamo:

$$2 + x_n > 2 + x_{n-1},$$

te je

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > \sqrt{2+x_{n-1}} = x_n.$$

Sada dokažimo da je niz omeđen. Međa mu je primjerice broj 2. To ponovno dokazujemo indukcijom. Baza: $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Pretpostavimo da je $x_n < 2$. Tada imamo

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Dakle, niz je rastući i omeđen pa ima limes a. Sad u jednakosti

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$$

možemo pustiti da n teži u beskonačnost:

$$a = \sqrt{2+a}, \tag{1}$$

odakle slijedi: $a^2 - a - 2 = 0$. Jedno rješenje ove jednadžbe je broj $a_1 = 2$, a drugo rješenje $a_2 = -1$. Samo $a_1 = 2$ zadovoljava (1) i to je traženi limes.

Primjer 6. Primjer pogrešnog zaključivanja. Pokažimo da niz 1, 3, 7, $15\ldots$ definiran s $x_1 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$ ima limes jednak -1. Napišimo istinitu jednakost

$$x_n = 2x_{n-1} + 1$$

i pustimo da n teži u beskonačnost. To nam daje jednakost limesa:

$$a = 2a + 1,$$

odakle slijedi $a = -1$.

U čemu je pogreška? Ne smijemo računati s nečim što ne postoji! Želimo li u računu koristiti limes a, moramo prije toga provjeriti da li on postoji. U ovom primjeru limes ne postoji jer je niz rastući i neomeđen.

Baza prirodnog logaritma — broj e

Niz kojemu je opći član

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

vrlo je važan u različitim primjenama. Njegov limes definira broj e, bazu prirodnog logaritma.

Ispišimo približne vrijednosti nekih članova ovog niza.

n	x_n
1	2
2	2.25
3	2.37
10	2.59
100	2.704
1000	2.7169
10 000	2.71814
10^6	2.718280
10^9	2.71828182832

Po ponašanju ovih članova pretpostavljamo da je niz rastući i omeđen odozgo, dakle — konvergentan je. Njegov limes ne možemo računati na neki jednostavan način, poput limesa u prije promatranim primjerima. Nakon što se uvjerimo da niz konvergira, limes ćemo *označiti* posebnim simbolom e, i na taj način *definirati* broj e. To je iracionalni broj s vrijednošću

$$e = 2.71828182846\ldots$$



Kako bismo pokazali konvergenciju niza (x_n), pokazat ćemo da je on monoton (rastući) i omeđen odozgo.

Monotonost i omeđenost niza slijedi iz Bernoullijeve nejednakosti:

$$(1+h)^{\alpha} \geqslant 1+\alpha h, \qquad \text{čim je } h>0 \text{ i } \alpha>1\,. \tag{2}$$

Stavimo u (2) $\alpha = \dfrac{n+1}{n}$, $h = \dfrac{1}{n+1}$:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1+\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} = 1+\frac{1}{n}.$$

Uzimajući n-tu potenciju obiju strana u ovoj nejednakosti dobivamo

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = x_n,$$

te je niz (x_n) rastući.

Iskoristimo Bernoullijevu nejednakost na još jedan način:

$$4^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}\cdot 2^{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}\left(1+1\right)^{1+\frac{2}{n}} > \frac{1}{2}\left(1+1+\frac{2}{n}\right) = 1+\frac{1}{n}.$$

Ponovno potencirajući dobivamo

$$4 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = x_n,$$

te je niz (x_n) omeđen odozgo brojem 4.

Time smo pokazali da je niz rastući i omeđen, pa je konvergentan. Njegov limes označit ćemo s e. U ovom trenutku ne znamo koliki je iznos tog broja!

Za svaki realni broj a vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} = e^{a}.$$

Tu formulu možemo pokušati opravdati tako da uvedemo zamjenu $m = n/a$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{a} = e^{a}.$$

Rezultat je istinit, ali ovaj račun nije potpuno opravdan, jer m ne mora biti prirodni broj.

Primjer 7.

Izračunajmo nekoliko limesa ovog tipa:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{2n-1}{3n}}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2n}{n+1}} = e^{-2}$$

Posljednji primjer možemo računati i ovako:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}.$$



Kutak plus

BROJ e

Broj e je transcedentan broj. (Za broj kažemo da je transcedentan ako ne postoji polinom s cjelobrojnim koeficijentima koji se poništava u tom broju.) Transcedentni brojevi čine podskup skupa iracionalnih brojeva. Prva tisuću i jedna znamenka broja e su:

e =2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995 95749 66967 62772 40766 30353 54759 45713 82178 52516 64274
27466 39193 20030 59921 81741 35966 29043 57290 03342 95260 59563 07381 32328 62794 34907 63233 82988 07531 95251 01901
15738 34187 93070 21540 89149 93488 41675 09244 76146 06680 82264 80016 84774 11853 74234 54424 37107 53907 77449 92069
55170 27618 38606 26133 13845 83000 75204 49338 26560 29760 67371 13200 70932 87091 27443 74704 72306 96977 20931 01416
92836 81902 55151 08657 46377 21112 52389 78442 50569 53696 77078 54499 69967 94686 44549 05987 93163 68892 30098 79312
77361 78215 42499 92295 76351 48220 82698 95193 66803 31825 28869 39849 64651 05820 93923 98294 88793 32036 25094 43117
30123 81970 68416 14039 70198 37679 32068 32823 76464 80429 53118 02328 78250 98194 55815 30175 67173 61332 06981 12509
96181 88159 30416 90351 59888 85193 45807 27386 67385 89422 87922 84998 92086 80582 57492 79610 48419 84443 63463 24496
84875 60233 62482 70419 78623 20900 21609 90235 30436 99418 49146 31409 34317 38143 64054 62531 52096 18369 08887 07016
76839 64243 78140 59271 45635 49061 30310 72085 10383 75051 01157 47704 17189 86106 87396 96552 12671 54688 95703 50354



Kutak plus

RAČUNANJE LIMESA RAČUNALOM

Računalo je moćan alat koji je izrazito koristan u matematičkim proračunima. No, kao i svaki alat, trebamo ga znati koristiti.

Možemo li računalo iskoristiti da mjesto nas računa limese nizova iz ove i prethodne lekcije? Očekujemo da će odgovor biti potvrdan pa pogledajmo račun u konkretnim primjerima. Tražit ćemo limese niza (a_n) kad n teži u beskonačnost. Dobra ideja jest da se uzimaju velike vrijednosti za n. U tablicama niže uzimat ćemo $n = 10^6$, 10^8 do 10^{14}. Ako niz konvergira, prema dobivenim vrijednostima trebali bismo naslutiti koliki mu je limes.

1) $a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$

n	a_n
10^6	0.99999800
10^8	0.99999998
10^{10}	1.00000000
10^{12}	1.00000000
10^{14}	1.00000000

Zaključak: niz konvergira i limes mu je 1. Zaključak je ispravan.

2) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

n	a_n
10^6	2.718280469
10^8	2.718281815
10^{10}	2.718281828
10^{12}	1.000000000
10^{14}	1.000000000

Zaključak: niz konvergira i limes mu je 1. Zaključak nije ispravan. Limes niza je broj e, što se naslućuje iz prvih triju vrijednosti.

3) $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

n	a_n
10^6	0.500000000
10^8	0.500000000
10^{10}	0.500000000
10^{12}	0.000000000
10^{14}	0.000000000

Zaključak: niz konvergira i limes mu je 0. Zaključak nije ispravan. Limes niza je 0.5, što se naslućuje iz prvih triju vrijednosti.

4) $a_n = \cos(2\pi n)$

n	a_n
10^6	1.000000000
10^8	0.999999999
10^{10}	0.999991450
10^{12}	0.915710804
10^{14}	−0.871960851

Zaključak: niz ne konvergira. Zaključak nije ispravan. Limes niza je 1.

Pokušajte objasniti zašto je došlo do pogrešaka u numeričkom računu.

Provjerite ove račune na svom džepnom ili stolnom računalu. Nemojte se čuditi ako dobijete drukčije rezultate. Oni ovise o konstrukciji svakog pojedinog računala, kao što ste zaključili u odgovoru na prethodno pitanje.

Pouka: Rezultate dobivene numeričkim računom ne smijemo nekritički prihvaćati. Moramo znati što računalo zapravo računa da bismo prihvatili dobivene rezultate.

Zadatci 4.5.

1. Od kojeg je člana niza (a_n), $a_n = n^2 - 12n + 11$ ispunjena nejednakost $a_{n+1} > a_n$?

2. Je li niz $a_n = \dfrac{2n-3}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ monoton?

3. Od kojeg je člana niza (a_n), $a_n = \dfrac{20^n}{n!}$ ispunjena nejednakost $a_{n+1} < a_n$?

4. Dokaži da je niz (x_n) s općim članom $x_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$ rastući.

5. Koji su od sljedećih nizova monotoni:

1) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; **2)** $a_n = 1.5^n$;

3) $a_n = 1 + 3(n-2)$; **4)** $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$;

5) $a_n = \dfrac{1}{n!}$; **6)** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$?

— ◆ —

6. Koliko članova niza (a_n), $a_n = |n^2 - 5n + 6|$, zadovoljava nejednakost $2 < a_n < 6$?

7. Koliko članova niza (a_n), $a_n = |n^2 - 5n - 6|$ zadovoljava nejednakost $10 < a_n < 100$?

8. Odredi najmanji član niza (a_n), $a_n = n + \dfrac{100}{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

9. Nađi najmanji i najveći član niza (a_n), $a_n = \dfrac{3n-18}{3n-19}$, $n \in \mathbf{N}$.

10. Odredi najmanji član niza (a_n), $a_n = \log_3^2 n - 3\log_3 n$.

11. Odredi najveći član niza (a_n), $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

12. Nađi najmanji član niza (a_n), $a_n = \dfrac{1+2+\ldots n}{n(n+1)} + \dfrac{1}{n}$.

13. Odredi najmanji član niza (a_n), $a_n = n + 5\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

— ◆ —

14. Dokaži da je niz (a_n) s općim članom $a_n = \dfrac{2n-3}{n}$ monoton i omeđen. Zatim odredi prirodni broj n_0 takav da je $|a_n - 2| < 0.01$ za sve $n > n_0$.

15. Niz (a_n), $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ je monoton i omeđen. Dokaži to! Odredi prirodni broj n_0 takav da je $|a_n - 1| < \varepsilon$ za sve $n > n_0$, ako je **1)** $\varepsilon = 0.1$; **2)** $\varepsilon = 0.01$; **3)** $\varepsilon = 0.001$.

16. Dokaži da je niz (a_n) omeđen ako je:

1) $a_n = \dfrac{n-2}{n+1}$; **2)** $a_n = \dfrac{3n+5}{2n}$;

3) $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+2}$; **4)** $a_n = \left(\dfrac{2n^2-1}{n^2+2}\right)^3$;

5) $a_n = \dfrac{2n^2-3}{n^2+3}$; **6)** $a_n = \dfrac{n+\sin n}{n+\cos n}$.

17. Dokaži da je niz (a_n) omeđen ako je:

1) $a_n = \dfrac{n+2}{2^n}$; **2)** $a_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$;

3) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

4) $a_n = \sqrt[3]{8n - n^3} + \sqrt[3]{8n + n^3}$;

5) $a_n = \log_{1/2}\dfrac{n+1}{n}$;

6) $a_n = \log(3n+2) - \log(n+1)$.

18. Dokaži da je niz (a_n) omeđen ako je:

1) $a_n = \dfrac{\cos(2n-1)\pi}{2n-1}$;

2) $a_n = \dfrac{1}{n} - \sin^2\dfrac{1}{n+1}$.

19. Je li niz (a_n) omeđen:

1) $a_n = \dfrac{n+1}{\log_2(n+2)}$;

2) $a_n = n \cdot \operatorname{tg}\dfrac{(2n+1)\pi}{4}$;

3) $a_n = 3^n + 2^{-n}$;

4) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$;

5) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n+1}$;

6) $a_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2(n+2)}$?

20. Dokaži da je niz (a_n) s općim članom $a_n = \frac{10^{3n}}{n!}$ omeđen.

21. Dokaži da je niz (a_n) s općim članom a_n omeđen odozdo:

1) $a_n = \frac{1}{n} + \sin\sqrt{n}$; **2)** $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n+2}{n^2}$.

22. Dokaži da je niz (a_n) omeđen:

1) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$;

2) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2-2}{2}$;

3) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.

23. Dokaži da postoji interval $[a, b]$ u kojem su svi članovi niza (a_n), $a_n = \frac{4n+5}{n+2}$ i odredi jedan takav interval.

24. Postoji li interval $[a, b]$ kojem pripadaju svi članovi niza (a_n), $a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{n+2}$?

25. Koji su od sljedećih nizova omeđeni? Za svaki omeđeni niz navedi interval unutar kojeg se nalaze svi članovi niza

1) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; **2)** $a_n = 1.5^n$;

3) $a_n = 1 + 3(n-2)$; **4)** $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$;

5) $a_n = \frac{1}{n!}$; **6)** $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.



26. Dan je niz (a_n), $a_n = \frac{3n+4}{n+2}$.
1) Dokaži da je niz rastući.
2) Dokaži da je niz omeđen.
3) Odredi limes niza.
4) Nađi onaj član niza za koji je razlika limesa i svakog sljedećeg člana manja od 0.01.

27. Dokaži da je niz s općim članom

$$a_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots 2\sqrt{2}}}}$$

(n korijena) rastući i izračunaj mu limes.

28. Neka je $a_1 = 0$, $a_n = \frac{2a_{n-1}+1}{3}$ za $n \geqslant 2$. Dokaži da je niz monoton i ograničen i izračunaj mu limes.

4.6. Geometrijski red

S pojmom niza povezan je i pojam **reda**. Zbrajajući članove niza (x_n) dobivamo novi niz parcijalnih suma (S_n), definiran na ovaj način

$$\begin{aligned} S_1 &:= x_1, \\ S_2 &:= x_1 + x_2, \\ S_3 &:= x_1 + x_2 + x_3, \\ &\vdots \\ S_n &:= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Možemo zamisliti da se postupak zbrajanja nastavlja u beskonačnost:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

Osnovno pitanje koje postavljamo promatrajući ovaj zbroj jest: je li on konačan?

Definicija reda

Izraz oblika

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

nazivamo **redom** i označavamo sa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Njegova n-ta parcijalna suma je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Kažemo da je red **konvergentan** ako je konvergentan niz (S_n) njegovih parcijalnih suma. U tom je slučaju suma reda jednaka limesu niza parcijalnih suma:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Primjer 1. Promotrimo niz (x_n), $x_n = n$. Promatrajući sume

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 + 2 + \ldots + n$$

vidimo da one nisu omeđene. Zato ne postoji zbroj

$$1 + 2 + \ldots + n + \ldots$$

i red nije konvergentan.

Primjer 2.

Promotrimo red

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Niz njegovih parcijalnih suma glasi:

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{3}{4},\quad S_3=\frac{7}{8}.$$

n-ta parcijalna suma jednaka je zbroju konačnog geometrijskog reda. Po formuli (3) sa stranice 89 je

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.$$

Ovaj niz ima limes. Naime, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, te je:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Geometrijski red

Ako je (a_n) geometrijski niz, tada red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots=a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots$$

nazivamo **geometrijski red**. Ovdje su a_1 i q zadani realni brojevi različiti od nule.

Mi poznajemo izraz za njegovu n-tu parcijalnu sumu:

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Vidimo da će o limesu niza (S_n) odlučivati $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$.

Sljedeće su mogućnosti.

1. $|q|>1$. U ovom slučaju niz (q^n) ne konvergira jer nije omeđen. Zato ne postoji niti limes niza S_n. Primjerice, sljedeći zbrojevi nisu konačni:

$$2+4+8+16+32+\ldots$$
$$3-6+12-24+48-\ldots$$

2. $q = 1$. Geometrijski niz je konstantan, a red glasi

$$a_1 + a_1 + a_1 + \ldots$$

te mu zbroj očito nije konačan.

3. $q = -1$. Red ima oblik

$$a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \ldots$$

Niz parcijalnih suma ovog niza izgleda ovako:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = a_1, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = a_1 \ldots$$

i on nema limesa jer ne teži nijednom broju (jer je uvijek $a_1 \neq 0$).

4. $|q| < 1$. U ovom slučaju limes niza (q^n) postoji i jednak je 0, te zato postoji i limes niza (S_n):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{\lim\limits_{n\to\infty} q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Geometrijski red

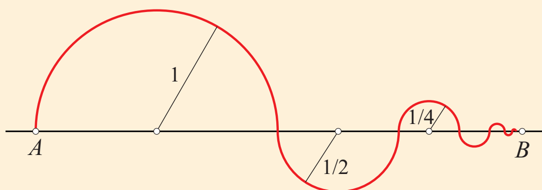
Geometrijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi $|q| < 1$. Njegova je suma jednaka:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}. \tag{1}$$

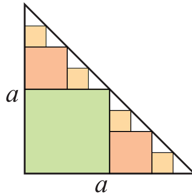
Primjer 3. Nad pravcem AB konstruirana je polukružnica polumjera 1, zatim do nje niz polukružnica od kojih svaka sljedeća ima dva puta manji polumjer. Kolika je duljina tako dobivene krivulje?



▶ Duljina prvog kružnog luka je $d_1 = 1 \cdot \pi$, duljina drugog $d_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi$. Općenito, n-ti luk ima duljinu $d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \pi$. Zbroj ovog geometrijskog reda je

$$d = \pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\pi = 2\pi.$$

Primjer 4. U jednakokračan pravokutni trokut s krakom duljine a, upisan je kvadrat kojemu je jedan vrh u vrhu pravog kuta. Zatim su upisana dva kvadrata, potom četiri manja, osam još manjih itd., kao na slici. Izračunaj ukupnu površinu svih upisanih kvadrata.



Površina prvog kvadrata je $\dfrac{a^2}{4}$. Svaki sljedeći ima dvostruko manju stranicu, pa mu je površina četiri puta manja. Broj tih kvadrata raste tako da ih je u svakom sljedećem koraku dvostruko više. Zato je ukupna površina svih kvadrata zbroj geometrijskog reda:

$$P = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{4}\right)^2 + 2^2\left(\frac{a}{2^3}\right)^2 + 2^3\left(\frac{a}{2^4}\right)^2 + \ldots$$
$$= \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^2}{2^3} + \frac{a^2}{2^4} + \frac{a^2}{2^5} + \ldots = \frac{a^2}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)$$
$$= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a^2}{2}$$

Zbrajajući površinu svih kvadrata, dobili smo površinu početnog trokuta. Na sličnoj ideji se temelji računanje površina ispod bilo koje krivulje, što će biti obrađeno u poglavlju s integralnim računom.

Zadatak 1. Na kocku brida a postavi se nova kocka kojoj vrhovi donje osnovice leže u polovištima bridova gornje osnovke, na isti je način na drugu postavljena treća kocka, na treću četvrta itd. Odredi zbroj obujma svih ovih kocaka.

Zadatak 2. U jednakostraničan trokut površine P upisan je kvadrat koji leži na stranici trokuta i dira oba njegova kraka. Zatim je upisan novi manji kvadrat koji dodiruje prethodni kvadrat i obje stranice trokuta. Postupak se nastavlja na isti način. Koliki je zbroj površina svih upisanih kvadrata?

Primjer 5. Pokažimo kako s pomoću geometrijskog reda možemo beskonačan decimalni prikaz racionalnog broja pretvoriti u standardni prikaz.

Neka je $x = 0.\dot{2}\dot{3}$. Odredimo mu standardni prikaz.

$$x = 0.\dot{2}\dot{3} = 0.232323\ldots = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \ldots$$
$$= 23 \cdot 10^{-2} + 23 \cdot 10^{-4} + 23 \cdot 10^{-6} + \ldots$$

Radi se o konvergentnom geometrijskom redu s prvim članom $a_1 = 23 \cdot 10^{-2}$ i kvocijentom $q = 10^{-2}$. Njegova je suma

$$x = \frac{23 \cdot 10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{23}{10^2 - 1} = \frac{23}{99}.$$

Zadatak 3. Zapiši u obliku razlomka brojeve $0.3\dot{6}$, $1.2\dot{4}\dot{5}$

Zadatak 4. Izračunaj $\dfrac{2.\dot{4}}{0.1\dot{5}}$.

Zadatak 5. Dokaži da vrijedi $3.\dot{9} = 4$, $2.4\dot{5}\dot{4} = 2.\dot{4}\dot{5}$.



Povijesni kutak

AHILEJ I KORNJAČA

Osvrnimo se na stari i poznati problem **Ahileja i kornjače**. Po predaji, brzonogi Ahilej nikad neće moći prestići kornjaču ako ona počne 'trčati' 10 stadija (starogrčka mjera za dužinu, iznosi oko 192 m) ispred njega. Jer, dok Ahilej (koji je, ne trudeći se odveć, deset puta brži od kornjače) pretrči 10 stadija, kornjača prijeđe 1, dok Ahilej pretrči taj 1 stadij, kornjača se udalji za 0.1 stadij i tako do beskonačnosti. Dakle, Ahilej nikad ne može pretrčati kornjaču.

Ovaj se paradoks pripisuje starogrčkom filozofu **Zenonu** (oko 490. – oko 430. g. prije Krista, iz grčkog grada Elea, na jugu Italije, u području današnjeg Salerna.) Sasvim je izvjesno da je Zenon, iako nije poznavao formulu za zbroj geometrijskog reda, ipak znao da će Ahilej preteći kornjaču. Izračunajmo kad i gdje.

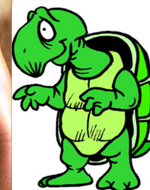
Promotrimo niz vremena koja su potrebna da bi Ahilej došao do mjesta na kojem se prije mjerenja nalazila kornjača. Neka je t vrijeme potrebno Ahileju da pretrči prvih 10 stadija (predaja ne govori koliki je t, ne znamo koliko je Ahilej bio brz). Sljedeći 1 stadij on će pretrčati za deset puta kraće vrijeme, dakle u vremenu $\dfrac{t}{10}$. Sljedeći 0.1 stadij u vremenu $\dfrac{t}{100}$. Ukupno vrijeme potrebno Ahileju da dostigne kornjaču jednako je sumi beskonačnog geometrijskog reda

$$t + \frac{t}{10} + \frac{t}{100} + \ldots$$

Rješenje je paradoksa u tome što ovih vremenskih intervala ima beskonačno mnogo, ali im je zbroj konačan. Kvocijent reda je $q = \frac{1}{10}$, pa je njegova suma

$$T = \frac{t}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}t.$$

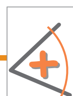




Na kojem će mjestu Ahilej dostići kornjaču? Odsječci puta na kojima je kornjača u prednosti čine beskonačan geometrijski red

$$10 + 1 + 0.1 + \ldots$$

čija je suma $\dfrac{10}{1 - \frac{1}{10}} = 11.111\ldots$ stadija.

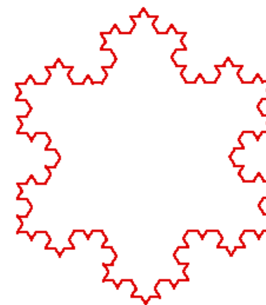


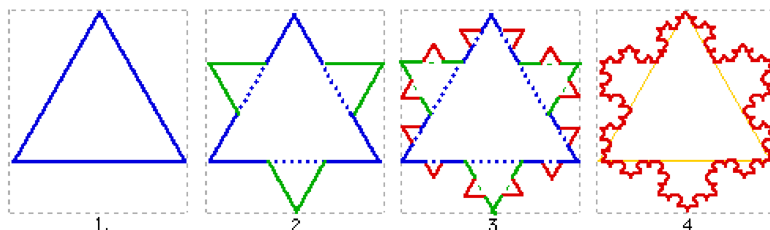
Kutak plus

GEOMETRIJSKI NIZ U FRAKTALNIM LIKOVIMA

Jedan od najjednostavnijih fraktalnih likova je **Kochova pahuljica**. Ime je dobila po švedskom matematičaru **Helge von Kochu** (1870. – 1924.).

Nastanak Kochove pahuljice vidi se na slikama. U svakom koraku, svaka se dužina podijeli na tri jednaka dijela i nad srednjim dijelom konstruira jednakostraničan trokut.



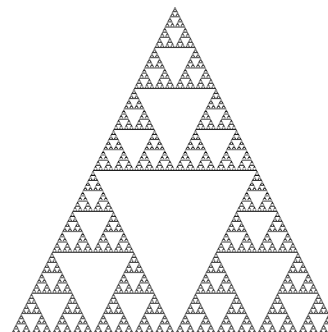


Promotrimo duljinu Kochove krivulje, u svakom koraku konstrukcije. Početna duljina iznosi $L_1 = 3 \cdot 1 = 3$. U drugom koraku dobivamo $3 \cdot 4$ dužina, od kojih je svaka duga $\frac{1}{3}$, pa je duljina krivulje jednaka $L_2 = 3 \cdot \frac{4}{3}$. U svakom sljedećem koraku dužina ima 4 puta više, a njihova je duljina trećinu prethodnih, pa je ukupna duljina krivulje jednaka $L_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. Kad n teži u beskonačnost, duljina ove krivulje postaje beskonačno velika!

Geometrijski niz nalazimo i u drugom klasičnom fraktalu, **Sierpinskijevom trokutu** (Wacław Sierpinski, 1882. – 1969., poljski matematičar).

Nastanak trokuta možemo pratiti na slikama. U svakoj iteraciji se iz postojećih punih trokuta izreže jednakostranični trokut, površine jednake četvrtini trokuta.

Kolika je površina lika u svakoj iteraciji? U početku, neka je $P_1 = 1$. Onda je u drugoj iteraciji površina jednaka $P_2 = 3 \cdot \frac{1}{4}$. U sljedećoj iteraciji ona iznosi $P_3 = 9 \cdot \frac{1}{16}$. Općenito, u n-tom koraku, površina će biti $P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. Kad n teži u beskonačnost, ovaj niz teži k nuli. Sierpinskijev trokut nema površine.





1. Koristeći formulu za zbroj geometrijskog reda, dokaži da je površina Kochove pahuljice jednaka $\frac{8}{5}$ površine početnog trokuta.

2. Koristeći formulu za zbroj geometrijskog reda, izračunaj ukupnu površinu *izbačenih* trokuta u postupku konstrukcije Sierpinskijeva trokuta. Uvjeri se da je ta površina jednaka ukupnoj površini trokuta.

Zadatci 4.6.

1. Odredi zbroj članova beskonačnog geometrijskog niza:

1) $2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \ldots$ **2)** $4,\ 2\frac{2}{3},\ 1\frac{7}{9},\ \ldots$

3) $1,\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2^2},\ \ldots$ **4)** $\sqrt{2},\ \sqrt{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{4}\sqrt{2},\ \ldots$

5) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ \frac{1}{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \ldots$

6) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},\ \ldots$

7) $2+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2},\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ldots$

8) $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},\ 1,\ \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}},\ \ldots$

2. Odredi zbroj geometrijskog reda:

1) $1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\ldots$

2) $1-\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}-\ldots$

3) $1-\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}-\ldots$

4) $1+\cos^2\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}+\ldots$

3. Odredi zbroj geometrijskog reda kojem su zadana prva dva člana:

1) $3,\ 1;$ **2)** $2,\ 1.8;$

3) $\sqrt{3},\ \sqrt{2};$ **4)** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ 1.$

4. Zapiši u obliku razlomka:

1) $0.2\dot{7}\cdot 0.1\dot{6}\dot{3};$ **2)** $0.3\dot{8}\cdot 0.5\dot{4}\dot{5};$

3) $\frac{0.2\dot{5}}{0.12\dot{7}};$ **4)** $\frac{0.2\dot{2}\dot{7}}{0.\dot{6}\dot{3}}.$

5. Odredi x iz jednadžbe: $\frac{4x}{6.\dot{7}+\frac{5}{9}-0.45\dot{3}}=3.\dot{3}$

6. Izračunaj x iz jednadžbe: $\frac{x+0.3\dot{2}}{1\frac{27}{32}-0.625}=1.0\dot{6}.$

7. Koliko je

1) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}};$ **2)** $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\ldots}}}}};$

3) $\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\ldots}}}}}$?

8. Riješi sljedeće jednadžbe:

1) $2^{x+x^2+x^3+\ldots}=2\sqrt{2};$

2) $x^{\log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)}=1;$

3) $1+\log_2\sin x+\log_2^2\sin x+\log_2^3\sin x+\ldots=\frac{2}{3};$

4) $\log x+\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log x+\ldots=2;$

5) $\log x+\log\sqrt[3]{x}+\log\sqrt[9]{x}+\ldots=3;$

6) $1-\sin x+\sin^2 x-\sin^3 x+\ldots=\frac{2}{3};$

7) $8^{1+|\cos x|+\cos^2 x+\ldots}=64.$

9. Riješi jednadžbe:

1) $1+2x+4x^2+\ldots+(2x)^n+\ldots$
$=3.4-1.2x,\ |x|<0.5;$

2) $1+|x|+|x^2|+|x^3|+\ldots=5,\ |x|<1;$

3) $2^{x+2}+2^{x+1}+2^x+\ldots$
$=3^{x+3}+3^{x+2}+3^{x+1}+\ldots.$



10. Njihalo je otklonjeno za kut 30° u odnosu na ravnotežni položaj. Pri svakom povratku, njihalo dostigne tek 90% otklona iz prethodnog položaja.

1) Nakon koliko njihaja će otklon postati manji od 1° ?

2) Ako je duljina niti 1 m, koliki će ukupni put prevaliti uteg na kraju njihala dok se ne umiri?

11. Loptica je bačena 5 m uvis. Pri svakom odskoku, ona dostigne 3/ 4 prethodne visine.

1) Do koje će visine loptica odskočiti u petom odskoku?

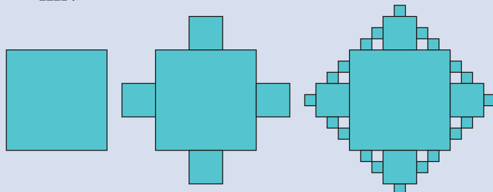
2) Koliki će ukupni put prevaliti od trenutka prvog najvišeg položaja?

12. Prva tri člana aritmetičkog niza jednaka su prvim trima članovima geometrijskog niza. O kojem se nizu radi?

13. Na svakoj stranici kvadrata dodan je novi, kojemu je stranica tri puta manja od prethodne. Postupak se nastavlja unedogled.

1) Kolika je površina dobivenog lika nakon 5 iteracija?

2) Kolika je površina graničnog lika i koji je to lik?



14. Zbroj beskonačnog konvergentnog geometrijskog reda iznosi 15, a zbroj kvadrata njegovih članova jednak je 45. Koji je prvi član ovog niza?

15. Zbroj beskonačnog konvergentnog geometrijskog reda jednak je 3, a zbroj kubova svih njegovih članova iznosi $\frac{108}{13}$. Odredi niz.

16. Omjer zbroja kubova svih članova beskonačnog konvergentnog geometrijskog reda i zbroja njihovih kvadrata jednak je $12 : 13$. Zbroj prvih dvaju članova iznosi $\frac{4}{3}$. Nađi taj red.

17. Koliki je količnik beskonačnog konvergentnog geometrijskog niza ako je zbroj prvih šest članova u nizu jednak $\frac{7}{8}$ njegovog ukupnog zbroja?

18. Peti član beskonačnog konvergentnog geometrijskog niza je 16. Svaki član u tom nizu upola je manji od zbroja svih članova koji za njim slijede. Kako glasi taj niz?

19. Dana je dužina $\overline{AB}$, $|AB| = a$. Točke C, C_1, C_2, $C_3, \ldots$ polovišta su dužina $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{C_1C_2}, \ldots$ Nad $\overline{AB}$ konstruirana je polukružnica na jednu stranu, nad $\overline{AC}$ na drugu stranu, pa nad $\overline{CC_1}$ opet na prvu itd. Kolika je duljina tako konstruirane krivulje?

20. Zadana je dužina $\overline{AB}$, $|AB| = a$. Točkom C je dužina $\overline{AB}$ podijeljena na dva jednaka dijela te je nad $\overline{AC}$ konstruiran jednakostraničan trokut. Zatim se točkom C_1 raspolovi dužina $\overline{BC}$ i nad $\overline{CC_1}$ opet konstruira jednakostraničan trokut. Potom se nad $\overline{C_1C_2}$, gdje je C_2 polovište od $\overline{BC_1}$, konstruira jednakostraničan trokut itd. Koliki je zbroj površina svih tako konstruiranih jednakostraničnih trokuta?

21. Dan je pravokutni trokut ABC s kutovima $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ i hipotenuzom $\overline{AB}$, $|AB| = c$. Iz vrha pravog kuta spuštena je okomica na hipotenuzu, iz nožišta te okomice okomica na $\overline{BC}$, iz nožišta ove opet okomica na $\overline{AB}$ itd. Odredi zbroj duljina svih segmenata što ih unutar trokuta određuju konstruirane okomice.

22. Nad polovinom dijagonale kvadrata kao stranicom konstruiran je kvadrat, nad polovinom dijagonale ovoga ponovno se konstruira kvadrat itd. Koliki je zbroj površina svih tako konstruiranih kvadrata ako je stranica prvog kvadrata duljine a?

23. Nad visinom jednakostraničnog trokuta konstruiran je novi jednakostraničan trokut, nad visinom novoga opet jednakostraničan trokut itd. Koliki je zbroj površina svih na ovaj način konstruiranih trokuta ako je duljina stranice prvog jednaka a?

24. Dan je kvadrat $ABCD$ sa stranicom duljine a. U točki koja stranicu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru $1 : 2$ vrh je novog kvadrata što je upisan zadanom. Po istom se principu sada ovome upiše kvadrat i postupak se nastavlja. Koliki je zbroj površina svih ovih kvadrata?

25. Dan je jednakostranični trokut ABC sa stranicom duljine a. Točka P koja dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru $1 : 2$ vrh je novog jednakostraničnog trokuta PQR koji je upisan trokutu ABC. Po istom pravilu trokutu PQR upišemo jednakostraničan trokut te postupak nastavljamo. Koliki je zbroj površina svih takvih jednakostraničnih trokuta?

26. Dan je trokut sa stranicama duljina 15, 41 i 52 cm. Polovišta njegovih stranica čine novi trokut, a polovište stranica toga opet novi itd. Koliki je zbroj površina svih tih trokuta?

27. Jednakostraničnom trokutu ABC, $|AB| = a$, upisana je kružnica, ovoj kružnici jednakostraničan trokut, trokutu opet kružnica itd. Koliki je zbroj površina svih trokuta, a koliki svih krugova što su omeđeni konstruiranim kružnicama?

28. U jednakostraničan valjak upisana je sfera, sferi je upisan valjak, valjku opet sfera itd. Ako je površina osnog presjeka prvog valjka $100\,\text{cm}^2$, koliki je zbroj površina svih sfera?

4.7. Kamatni račun

Jedna od vrlo važnih primjena geometrijskog niza i eksponencijalne funkcije jest kamatni račun. S njim se susrećemo u svakidašnjem životu, pri ulaganju, štednji, pozajmicama. U ovoj ćemo točki opisati samo najjednostavnije primjere, ne promatrajući složenije situacije koje se proučavaju u srednjim školama i fakultetima gospodarskog usmjerenja.

Spomenimo najprije temeljne pojmove kojima se služimo u kamatnom računu. Iznos novca koji želimo uložiti u danom trenutku nazivamo **glavnica** (**kapital**). Označavamo ga s C. Po isteku roka posuđena će glavnica donijeti **kamatu**, čiji iznos ovisi o vremenu posuđivanja, načinu obračuna i **kamatnoj stopi**.

Jednostavno ukamaćivanje

100 kn oročenih na jednu godinu uz kamatnu stopu od 5 % donijet će na kraju razdoblja 5 kn kamate. Ovdje je riječ o jednostavnom ukamaćivanju po kojem se početna vrijednost glavnice C_0 po isteku razdoblja uvećava za kamatu u iznosu $C_0 \cdot \dfrac{p}{100}$, tako da je njezina vrijednost na kraju razdoblja

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{p}{100} = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Iznos kamate za razdoblja različita od jedne godine računa se po formuli

$$C_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot t$$

i ova se vrijednost dodaje glavnici. Ovdje je t vrijeme posudbe izraženo u godinama.

Primjer 1.

Dogovore li se dva partnera o zajmu u iznosu od 100 000 kn s godišnjom kamatnom stopom od 8 %, pa se glavnica vrati nakon deset mjeseci, tada joj treba pridodati i kamate od

$$100\,000 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{10}{12},$$

jer je ovdje $t = \frac{10}{12}$.

Složeni kamatni račun

Oročava li se novac na duži rok, tada je prirodno da se po isteku jedne godine i kamate pripisuju glavnici. Na taj će se način u sljedećim vremenskim intervalima uvećavati i sama kamata (jer se obračunava i kamata na kamatu).

Primjer 2. Netko oroči 100 000 kn na rok od pet godina, uz godišnju kamatnu stopu od 10 %. Koliki će iznos podići na kraju tog razdoblja?

Na kraju prve godine glavnica će donijeti kamate od $100\,000 \cdot \frac{10}{100} =$ 10 000 kn, tako da uvećana glavnica u tom trenutku iznosi 110 000 kn. Na kraju druge godine ova će glavnica donijeti 11 000 kamata. Iznos kamata i vrijednost glavnice na kraju svake godine napisana je u sljedećoj tablici:

	kamate	glavnica	
$n=0$		100 000	C_0
$n=1$	10 000	110 000	C_1
$n=2$	11 000	121 000	C_2
$n=3$	12 100	133 100	C_3
$n=4$	13 310	146 410	C_4
$n=5$	14 641	161 051	C_5

U svakoj sljedećoj godini glavnica se uvećava za isti postotak:

$$C_1 = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

$$C_2 = C_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,$$

$$C_3 = C_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$$

$$\vdots$$

Prema tome, niz (C_n) je *geometrijski niz*.

Složene kamate

Glavnica C_0 oročena na n godina uz kamatnu stopu od p % porast će na svotu

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Ovdje je $1+\frac{p}{100}$ **kamatni faktor** za koji se povećava glavnica u roku od jedne godine.

Primjer 3. Koliko novca treba oročiti da se nakon deset godina, uz kamatnu stopu od 6 %, dobije svota 200 000 kn?

Stanje glavnice nakon deset godina je

$$C_{10} = C_0\left(1+\frac{6}{100}\right)^{10} = 200\,000.$$

Odavde je

$$C_0 = \frac{200\,000}{1.06^{10}} = \frac{200\,000}{1.7908} = 111\,679.$$

To je traženi iznos.

Napomena. Potencija 1.06^{10} računa se na džepnom računalu s pomoću tipke y^x :

$$\boxed{1.06}\ \boxed{y^x}\ \boxed{10}\ \boxed{=} \qquad (1.7908).$$

Ako vaše računalo ne posjeduje tipku y^x , onda koristite svojstvo eksponencijalne i logaritamske funkcije: $y^x = 10^{x \log y}$, ili isto to za bazu prirodnog logaritma: $y^x = e^{x \ln y}$;

$$1.06^{10} = 10^{10 \log 1.06} = 10^{0.25305} = 1.7908.$$

Primjer 4.

Nakon koliko će godina glavnica C_0, oročena uz kamatnu stopu od $5\ \%$, udvostručiti svoju vrijednost?

▶ Prema uvjetima možemo napisati:

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \implies 2C_0 = C_0\left(1 + \frac{5}{100}\right)^n,$$

te je

$$1.05^n = 2 \implies n = \frac{\log 2}{\log 1.05} = 14.206.$$

Treba proći 15 godina.

Primjer 5.

Uz koju kamatnu stopu treba posuditi glavnicu od 100 000 kn da bismo nakon pet godina dobili iznos od 150 000 kn?

▶ Sad vrijedi

$$150\,000 = 100\,000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \implies \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 1.5.$$

Daljnje računanje ovisi o računalu. Ako vaše računalo posjeduje tipku y^x ili $\sqrt[x]{y}$, računamo iz jedne od ovih dviju jednakosti:

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{1.5} = 1.5^{0.2}.$$

Ako računalo posjeduje samo eksponencijalne i logaritamske funkcije, onda računamo ovako:

$$1 + \frac{p}{100} = 10^{0.2 \log 1.5} = 1.08447,$$

te je $p = 8.447$.

Pri štednji su rijetke situacije u kojoj se velike svote oročavaju na duže razdoblje. Češće se javlja situacija u kojoj se manji iznosi uplaćuju u redovitim vremenskim intervalima i oročavaju do nekog datuma. Takav način štednje naziva se *obročna štednja*.

Opišimo sljedeću situaciju. Isti iznos S uplaćuje se na početku svake godine i oročava na vrijeme od n godina. Godišnja kamatna stopa je $p\,\%$. Kolikom ćemo svotom raspolagati po isteku desete godine?

Svota uplaćena na početku prve godine donijet će, zajedno s kamatama i kamatama na kamate iznos od $S \cdot r^n$, gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$ kamatni faktor. Svota uplaćena na početku druge godine donijet će iznos od $S \cdot r^{n-1}$ itd. Svota uplaćena na početku posljednje godine vrijedit će na kraju $S \cdot r$. U tom trenutku ukupna svota iznosi:

$$S_n = Sr^n + Sr^{n-1} + \ldots + Sr = Sr(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = Sr\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Primjer 6.

Petar uplaćuje životno osiguranje u godišnjim obrocima od 5000 kn, uz kamatnu stopu od 8 %. Kolikom će svotom raspolagati na kraju dvadesete godine?

Imamo: $r = 1.08$, $S = 5000$, $n = 20$.

$$S_{20} = S \cdot r \cdot \frac{r^{20} - 1}{r - 1} = 5000 \cdot 1.08 \cdot \frac{1.08^{20} - 1}{1.08 - 1} = 247\,114.$$

Primijetimo da u ovom iznosu glavnicu čini 100 000 kn, a 147 114 doprinos je kamata.

Temeljni vremenski rok od jedne godine za pripis kamata u većini novčarskih poslovanja je predug. Poznato je da se novac može oročiti i na kraće vremensko razdoblje, od, recimo, samo sedam dana. Nakon toga se glavnici pripisuje kamata koja se i sama može ponovno oročiti. Jasno je da će se uz istu kamatnu stopu na kraju godine dobiti veća svota.

Primjer 7.

Netko je oročio 100 000 kn na rok od jedne godine s kamatnom stopom od 8 % i kvartalnim pripisom kamata. Kolikom će glavnicom raspolagati krajem godine?

Krajem prvog tromjesečja glavnici se pripisuje kamata od

$$100\,000 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{4} = 2000,$$

jer je protekla četvrtina godine. Sad je iznos glavnice 102 000. Nova će glavnica za tri mjeseca donijeti kamate pa će stanje glavnice nakon šest mjeseci biti:

$$102\,000 + 102\,000 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{4} = 104\,040.$$

Na kraju trećeg tromjesečja imamo:

$$104\,040 + 104\,040 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{4} = 106\,120.8,$$

a na kraju godine:

$$106\,120.8 + 106\,120.8 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{4} = 108\,243.2\ .$$

Iznos od 243.2 kn nastao je efektom tromjesečnog ukamaćivanja.

Opišimo općenitu situaciju. Ako se ukamaćivanje obavlja m puta godišnje, onda je iznos glavnice na kraju prvog razdoblja:

$$C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right),$$

na kraju drugog razdoblja:

$$C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^2,$$

a na kraju godine:

$$C_1 = C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^m.$$

Produži li se razdoblje kroz više godina, na kraju n-te godine glavnica će iznositi:

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}.$$



Usporedimo vrijednosti glavnice C_1 za $p = 100$ i za različite brojeve m.

ukamaćivanje	m	r
jednom godišnje	1	2
polugodišnje	2	2.25
tromjesečno	4	2.441
mjesečno	12	2.6130
tjedno	52	2.69260
dnevno	365	2.714567
svaki sat	8766	2.7181269
svake minute	529 960	2.71827226
svake sekunde	31 557 600	2.718281785

Povećanjem broja m ovaj postotak ne može premašiti broj 2.72. Zapravo, radi se o rastućem nizu brojeva s limesom

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = 2.718281828\ldots$$

Ukamaćivanje svake sekunde nije besmislica! Upravo se na taj način ponašaju mnoge prirodne pojave.

Neprekinuto ukamaćivanje

Ako se ukamaćivanje obavlja svakog trenutka, tada će glavnica na kraju godine biti

$$C_1 = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m = C_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}\cdot\frac{p}{100}} = C_0 e^{\frac{p}{100}},$$

a po isteku n godina:

$$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn} = C_0 e^{\frac{np}{100}}. \qquad (1)$$

Očito, rok ne mora biti cijeli broj godina. U svakom trenutku t (koji se mjeri u godinama, ali ne mora biti cijeli broj) vrijednost glavnice bit će

$$C_t = C_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}. \qquad (2)$$

Primjer 8. Popisi stanovništva obavljaju se svakih deset godina. Ako je u dvama uzastopnim popisima stanovništvo neke države povećano sa 16 000 000 na 17 500 000, koliko će ta država imati stanovnika 20 godina nakon drugog popisa, uz pretpostavku da će prirast i u sljedećim godinama biti jednak?

Računat ćemo prema neprekinutom ukamaćivanju. Iz (1) slijedi, za $n=10$:

$$17\,500\,000 = 16\,000\,000 e^{\frac{10p}{100}} \implies e^{\frac{p}{10}} = 1.09375$$

te je

$$p = 10\cdot\ln 1.09375 = 0.89612\ \%.$$

Sada dobivamo:

$$C_{30} = 16\,000\cdot e^{\frac{30p}{100}} = 20\,935\,058.$$

Za 20 godina bit će oko 20 935 000 stanovnika. Provjerite da će se ista vrijednost dobiti i računom složenih kamata.

Prema ovom zakonu računa se, recimo, prirast biljne mase (na primjer, drva u šumi), prirast stanovništva nekog (velikog) grada ili države itd.

Zadatci 4.7.

1. Na koliko će glavnica od 50 000 kn narasti nakon pet godina uz kamatu od 6 % ako se ukamaćivanje obavlja **1)** godišnje; **2)** polugodišnje; **3)** mjesečno?

2. Na koji iznos naraste glavnica od 1000 kn uz godišnju kamatu 5 %, poslije 1, 2, 3, 5, 10, 20 godina? Ukamaćivanje je složeno.

3. Za koliko se godina glavnica od 2500 kn poveća na 4000 kn ako je ukamaćivanje složeno s godišnjom kamatom 5.4 %?

4. Na koliko godina treba uložiti glavnicu C uz 6 % složene kamate, da bi se ona udvostručila?

5. Glavnicu C oročavamo na n godina uz godišnju kamatu p % da bismo dobili vrijednost C_n. Izračunaj nepoznati podatak ako je zadano:

1) $C = 12\,000$, $n = 5$, $p = 6\ \%$, $C_n = ?$;
2) $C = 12\,000$, $n = 8$, $p = ?$, $C_n = 17\,000$;
3) $C = 12\,000$, $n = ?$, $p = 4.5\ \%$, $C_n = 17\,065$;
4) $C =$, $n = 6$, $p = 5\ \%$, $C_n = 22\,000$.

6. Banka omogućuje ukamaćivanje u intervalima od jednog mjeseca, ali tako da ukupna godišnja kamata bude 7.5 %. Koliki je postotak povećanja glavnice nakon jednog mjeseca?

7. Poduzeće A treba vratiti poduzeću B svotu od 350 000 kn u roku od pet godina, uz godišnju kamatu od 8 %. Ako ono želi platiti dug po isteku treće godine, koliku svotu treba isplatiti?

8. Glavnica od 5 000 kn uložena je prije 6 godina, i to prve tri godine s kamatom 5 %, a posljednje tri s kamatom od 5.5 %. Kolika je sada njezina vrijednost?

9. Josip je uplaćivao životno osiguranje tijekom trideset godina u iznosu od 1000 kn na početku svake godine, uz kamatu od 6 %. Nakon toga želio je da mu se kamate (uz isti kamatu) isplaćuju jednom mjesečno kao renta. Kolika će biti ta renta?

10. U jednom je gradu 1970. bilo 83 000 žitelja, a 1995. 88 000. Koliko se žitelja može očekivati 2010. godine ako pretpostavimo da će prirast i u sljedećim godinama biti jednak?

11. Po procjeni, u šumi ima $32\,500\ \mathrm{m}^3$ drva. Koliko će drva u šumi biti za 10 godina ako je godišnji prirast 2.5 %? Računaj po formuli za neprekinuto ukamaćivanje.

Rješenja i upute



drvena ograda

Ovo su kratki odgovori na zadatke unutar gradiva pojedine lekcije. Ti se zadatci nalaze ispod detaljno riješenih primjera. Postupak rješavanja najčešće je sličan postupku kojim je riješen primjer iznad zadatka.

1.1

Zadatak 1. 57; 457; 215; 45.

Zadatak 2. 18; 10; 180. $18 \times 10 = 180$.

Zadatak 3. Račun vrijedi u brojevnom sustavu s bazom 12.

Zadatak 4. **1)** $1353_{(8)}$; **2)** $16F_{(16)}$.

Zadatak 5. $1034_{(6)}$; $1423_{(5)}$; $3232_{(4)}$.

Zadatak 6.

238	=	$59 \cdot 4 + 2$	2
59	=	$14 \cdot 4 + 3$	3
14	=	$3 \cdot 4 + 2$	2
3	=	$0 \cdot 4 + 3$	3

Zato je $238 = 3232_{(4)}$.

Zadatak 7. $123 = 173_{(8)} = 7B_{(16)}$; $9876 = 23224_{(8)} = 2694_{(16)}$; $55555 = 154403_{(8)} = D903_{(16)}$.

Zadatak 8. $11 = 1011_{(2)}$; $22 = 10110_{(2)}$; $333 = 101001101_{(2)}$; $4444 = 1000101011100_{(2)}$.

Zadatak 9. $41227_{(8)} = 17047$.

Zadatak 10. $FFFF_{(16)}=65535$; $ABAB_{(12)}=18995$.

Zadatak 11. $1011_{(2)}+101_{(2)}=11+5=16=10000_{(2)}$; $100111001_{(2)}+1011011_{(2)} = 313+91 = 110010100_{(2)}$.

Zadatak 12. $100_{(2)} - 10_{(2)} = 4 - 2 = 2 = 10_{(2)}$; $1000_{(2)}-101_{(2)} = 8-5 = 3 = 11_{(2)}$; $10010001_{(2)} - 110011_{(2)} = 145 - 51 = 94 = 1011110_{(2)}$.

Zadatak 13. $11_{(2)} \cdot 11_{(2)} = 3 \cdot 3 = 9 = 1001_{(2)}$; $10101_{(2)} \cdot 11_{(2)} = 21 \cdot 3 = 63 = 111111_{(2)}$; $10101_{(2)} \cdot 1011_{(2)} = 21 \cdot 11 = 231 = 11100111_{(2)}$.

1.2

Zadatak 1. Korak indukcije:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Zadatak 2. **1)** *Baza indukcije.* Za $n = 1$, broj 80 je djeljiv sa 16.
Pretpostavka indukcije. $9^{n+1} + 8n - 9 = 16k$.
Korak indukcije. Broj $81(9^n+8n-9)-640n+720 = 16(81k - 40n + 45)$ je djeljiv sa 16.

2) *Baza indukcije.* Za $n = 1$, broj 91 je djeljiv s 13.
Pretpostavka indukcije. $3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3} = 13k$.
Korak indukcije. Broj $15(3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}) - 13 \cdot 2^{n+3} = 13(15k - 2^{n+3})$ je djeljiv s 13.

Zadatak 3. *Baza indukcije.* Tvrdnja vrijedi za $n = 3$ (nema dijagonala) i za $n = 4$ (dvije dijagonale).
Pretpostavka indukcije. Vrijedi $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$,
Korak indukcije. Dodajmo još jedan, $(n+1)$-vi vrh. Tada jedna stranica mnogokuta postaje dijagonala (ona koja povezuje dva vrha između kojih se nalazi dodani vrh), a novododani vrh čini novih $(n+1) - 3$ dijagonala. Zato vrijedi $d_{n+1} = d_n + (n-1)$. Sada iz pretpostavke indukcije imamo

$$d_{n+1} = \frac{n(n-3)}{2}+n-1 = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

i tvrdnja je dokazana.

Primijetite da je tvrdnju lakše dokazati direktno, ne koristeći indukciju.

Zadatak 4. *Baza indukcije.* Za $n = 2$ dva se pravca sijeku u jednoj točki.
Pretpostavka indukcije. $d_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$
Korak indukcije. $(n+1)$-vi pravac nije paralelan ni s jednim od ostalih pravaca pa ih siječe u n točaka. Ukupan broj presjeka je: $\dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

Zadatak 5. *Baza indukcije.* Za $n = 6$ vrijedi $2^6 = 64 > 60 = 6^2 + 4 \cdot 6$. (Tvrdnja ne vrijedi za $n = 5$).
Pretpostavka indukcije. $2^n > n^2 + 4n$ za neki n.
Korak indukcije. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + 4n) \\ &= 2n^2 + 8n \\ &= n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 2n - 5 \\ &> (n+1)^2 + 4(n+1) \end{aligned}$$

čim je $2n - 5 > 0$, a to je istina već za $n \geqslant 3$.

1.3

Zadatak 1. **1)** 408 240; **2)** 479 001 599; **3)** 6 375 600; **4)** 36.

Zadatak 2. **1)** 60; **2)** 840; **3)** 3024; **4)** 1 663 200; **5)** 653 837 184 000.

Zadatak 3. **1)** $n(n-1)$; **2)** $n(n+1)$.

Zadatak 4.

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$
$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$
$$\frac{n!\cdot k+n!\cdot(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$
$$\frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$
$$\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

Zadatak 5.

$$(a+b)^n\cdot(a+b)$$
$$=\binom{n}{0}a^{n+1}b^0+\binom{n}{1}a^nb^1+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\ldots$$
$$+\binom{n}{n-2}a^3b^{n-2}+\binom{n}{n-1}a^2b^{n-1}+\binom{n}{n}a^1b^n$$
$$+\binom{n}{0}a^nb^1+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2+\binom{n}{2}a^{n-2}b^3+\ldots$$
$$+\binom{n}{n-2}a^2b^{n-1}+\binom{n}{n-1}a^1b^n+\binom{n}{n}a^0b^{n+1}$$
$$=a^{n+1}+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right]a^nb^1+\left[\binom{n}{2}\binom{n}{1}\right]a^{n-1}b^2+\ldots$$
$$+\left[\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}\right]a^2b^{n-1}$$
$$+\left[\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right]ab^n+b^{n+1}$$
$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\ldots$$
$$+\binom{n+1}{n-1}a^2b^{n-1}+\binom{(}{n}+1)nab^n+b^{n+1}$$

Zadatak 6. **1)** $-4+4i$; **2)** $8-8i$.

Zadatak 7. $97-56\sqrt{3}$.

Zadatak 8. Iz $1+n+\frac{n(n-1)}{2}=46$ dobivamo $n=9$. Za $k=3$ dobivamo $\binom{9}{3}x^6\cdot(-2y)^3=-672x^6y^3$.

Zadatak 9. Član $k=3$; $\binom{9}{3}(\sqrt{x})^6\cdot(\sqrt[3]{x})^3=84x^4$.

Zadatak 10. $n=8$; postoji i to je 3. član, $k=2$.

1.4

Zadatak 1. $300=2^2\cdot3\cdot5^2$. Postoji $3\cdot2\cdot3=18$ različitih faktora.

Zadatak 2. 997.

Zadatak 3. Vrijedi $2\cdot3\cdot5\cdot7>100$ pa broj može imati najviše tri prosta faktora. U obzir dolaze brojevi $60=2^2\cdot3\cdot5$, $90=2\cdot5^2\cdot5$, $72=2^3\cdot3^2$, $96=2^5\cdot3$. Svaki od njih ima 12 faktora.

Zadatak 4. Prosti su brojevi: 907 i 911. $901=17\cdot53$, $903=3\cdot7\cdot43$, $905=5\cdot181$, $909=3\cdot3\cdot101$.

Zadatak 5. *Baza indukcije.* Za $n=1$, broj $3^{4n}-4^{3n}$ je djeljiv sa 17.
Pretpostavka indukcije. $3^{4n}-4^{3n}=17k$.
Korak indukcije. Broj $81(3^{4n}-4^{3n})-17\cdot4^{3n}=17(3^4k-4^{3n})$ je djeljiv sa 17.

Zadatak 6. $\frac{1223}{990}$, $\frac{1211}{99900}$.

Zadatak 7. $0.41\dot{8}\dot{7}$, $2.04\dot{9}\dot{8}$.

1.5

Zadatak 1. Pretpostavimo suprotno, $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\frac{m}{n}$. Kvadriranjem dobivamo

$$3+2\sqrt{15}+5\frac{m^2}{n^2},$$
$$\sqrt{15}=m^2-8n^22n^2$$

pa bi $\sqrt{15}$ bio racionalan broj. Sad se na isti način kao u Primjeru 1 dolazi do kontradikcije.

Zadatak 2. Iz $\log_3 2 = \frac{m}{n}$ slijedi $3^m = 2^n$ što nije moguće.

1.6

Zadatak 1. $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; $z_2 = \sqrt{10}\left(\cos 108°26'05''\right) + i\sin(108°26'05'')$.

Zadatak 2. $z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

1.7

Zadatak 1. $z_1^3 \cdot z_2^2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$.

2.1

Zadatak 1. $28 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 15 = 67200$

Zadatak 2. $56 \cdot 24 \cdot 46 \cdot 16 = 989184$, $55 \cdot 23 \cdot 45 \cdot 15 = 853875$.

Zadatak 3. Prva se karta može uzeti po volji, druga među 12 preostalih iste boje, pa je broj različitih načina $52 \cdot 12$. Međutim, tu je svaki mogući par brojen dva puta, pa je točan odgovor $\frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 12 = 312$ načina.

Zadatak 4. Ako je prvo slovo samoglasnik, onda je $5 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 3 = 22800$ načina, a ako je prvo slovo suglasnik, onda je $20 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 4 \cdot 18 = 136800$ načina. Ukupan je broj riječi 159 600.

Zadatak 5. $52^3 = 140\,608$.

Zadatak 6. Na $2^{10} - 1 = 1023$ načina.

Zadatak 7. **1)** Na $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 17\,100\,720$ načina, **2)** Na $25 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 25 = 390\,625$ načina, **3)** Na $25 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 4 \cdot 23 = 276\,000$ načina.

Zadatak 8. $52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$

2.2

Zadatak 1. (A,L,R,U), (A,L,U,R), (A,R,L,U), (A,R,U,L), (A,U,L,R), (A,U,R,L); (L,A,R,U), (L,A,U,R), (L,R,A,U), (L,R,U,A), (L,U,A,R), (L,U,R,A); (R,A,L,U), (R,A,U,L), (R,L,A,U), (R,L,U,A), (R,U,A,L), (R,U,L,A); (U,A,L,R), (U,A,R,L), (U,L,A,R), (U,L,R,A), (U,R,A,L), (U,R,L,A). Dvije riječi: Ural, ular.

Zadatak 2. $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,3,2)$, $(1,3,4)$, $(1,4,2)$, $(1,4,3)$, $(2,1,3)$, $(2,1,4)$, $(2,3,1)$, $(2,3,4)$, $(2,4,1)$, $(2,4,3)$, $(3,1,2)$, $(3,1,4)$, $(3,2,1)$, $(3,2,4)$, $(3,4,1)$, $(3,4,2)$, $(4,1,2)$, $(4,1,3)$, $(4,2,1)$, $(4,2,3)$, $(4,3,1)$, $(4,3,2)$. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Zadatak 3. (Š,K,E,T,O)

Zadatak 4. (A,K,L,O), (A,K,O,L), (A,L,K,O), (A,L,O,K), (A,O,K,L), (A,O,L,K); (K,A,L,O), (K,A,O,L), (K,L,A,O), (K,L,O,A), (K,O,A,L), (K,O,L,A); (L,A,K,O), (L,A,O,K), (L,K,A,O), (L,K,O,A), (L,O,A,K), (L,O,K,A); (O,A,K,L), (O,A,L,K), (O,K,A,L), (O,K,L,A), (O,L,A,K), (O,L,K,A). 12. i 13. po redu.

2.3

Zadatak 1. $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$, $(1,4,5)$, $(2,3,4)$, $(2,3,5)$, $(2,4,5)$, $(3,4,5)$. $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$.

Zadatak 2. $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$. $N = 39 \cdot \binom{45}{6} = 317\,657\,340$.

Zadatak 3. $\binom{10}{5} = 252$.

Zadatak 4. $\binom{50}{3} = 19\,600$.

Zadatak 5. 125 970.

Zadatak 6. $n = 18$.

Zadatak 7. U jednoj ekipi su dva, a u drugoj jedan mladić. Onda su u toj drugoj ekipi preostala tri člana djevojke, koje možemo odabrati na $\binom{5}{3} = 10$ načina. Tri su izbora za mladića, pa različitih takvih ekipa ima $3 \cdot 10 = 30$.

Zadatak 8. **1)** 66; **2)** 11; **3)** 220; **4)** 55.

Zadatak 9. $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2} = 30\,030$.

Zadatak 10. **1)** $13 \cdot 48 = 624$; **2)** $4 \cdot \binom{13}{5} = 1278$; **3)** $\frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{5!} = 1\,317\,888$.

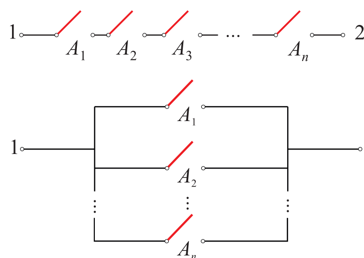
3.1

Zadatak 1. $AB = \{(1,2),(1,4),(1,6)\}$; $AC = \emptyset$; $BC = \{(1,1)\}$; $A \cup C = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(2,3),(2,5),(3,4),(3,6),(4,5)\}$.

3.2

Zadatak 1. Vjerojatnost se procjenjuje preko kvocijenta: (broj pisama)/ (broj bacanja)

Zadatak 2.



3.4

Zadatak 1. $\dfrac{2}{5}$.

Zadatak 2. $\dfrac{6}{12} \cdot \dfrac{5}{11} = \dfrac{5}{22}$.

Zadatak 3. $P(A) = \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{5}{14} \cdot \dfrac{6}{13} \cdot 6 = \dfrac{24}{91}$; $P(B) = \dfrac{1}{3}$.
$P(A|B) = \dfrac{4}{14} \cdot \dfrac{6}{13} \cdot 2 = \dfrac{24}{91} = P(A)$.

4.1

Zadatak 1. **1)** $\dfrac{49}{324}$; **2)** 10.

Zadatak 2. $50 \cdot (-1) + 50 \cdot (1+5+9+\ldots+189+193+197) = -50 + 50 \cdot (25 \cdot 198) = 247450$.

Zadatak 3. $a_2 = 8$, $a_3 = 13$, $a_4 = 18$, $a_5 = 23$; $a_n = 3 + 5(n-1)$.

Baza indukcije. Vrijedi $a_1 = 3$ i $a_2 = 8$.
Pretpostavka indukcije. $a_n = 3 + 5(n-1)$ i $a_n = a_{n-1} + 5$.
Korak indukcije. $a_{n+1} = 3 + 5n \implies a_n + 5 = 3 + 5n \implies a_n = 3 + 5(n-1)$.

4.2

Zadatak 1.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
3	−1	−5	−9	−13	−17
11	15	19	23	27	31
−19	−13	−7	−1	5	11
1.5	3	4.5	6	7.5	9

Zadatak 2. $\dfrac{3}{4}$.

Zadatak 3. $a_n = 8 + 2(n-1)$.

Zadatak 4. $a_2 = 2248.48$, $a_{12} = 3733.33$.

4.3

Zadatak 1.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	5	$\frac{25}{2}$	$\frac{125}{4}$	$\frac{625}{8}$	$\frac{3125}{16}$
$\frac{64}{81}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{8}{3}$	4	6
$\frac{54}{16}$	$\frac{18}{4}$	6	8	$\frac{32}{3}$	$\frac{128}{9}$

Zadatak 2. $a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162$.

4.4

Zadatak 1. **1)** $\dfrac{1}{3}$; **2)** 2.

Zadatak 2. **1)** $\dfrac{1}{2}$; **2)** $-\dfrac{3}{2}$.

Zadatak 3. **1)** 0; **2)** 0.

Zadatak 4. **1)** 1; **2)** $\dfrac{1}{2}$.

4.5

Zadatak 1. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$,
$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 0$,
$x_{n+1} - x_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0$;

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0,$$

$$y_{n+1} - y_n = 2^{-(n+1)} - 2^{-2} = -\frac{1}{2} \cdot 2^{-n} < 0$$

$$, a_{n+1} - a_n = -(n+1)^2 + n^2 = -2n - 1 < 0.$$

4.6

Zadatak 1. $\frac{8+2\sqrt{2}}{7} \cdot a^3$.

Zadatak 2. Primjenom sličnosti zaključujemo da za stranicu kvadrata vrijedi $x_1 = q \cdot a$, pri čemu je a stranica trokuta i $q = \sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. Stranica sljedećeg kvadrata x_2 odnosi se prema prethodnoj u istom omjeru q. Zato je $x_n = q^n a$. Površina svih kvadrata jednaka je zbroju geometrijskog reda

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots = q^2 a^2 \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{4(21-12\sqrt{3})}{36-20\sqrt{3}} P.$$

Ta je suma približno jednaka $0.634P$.

Zadatak 3. $\frac{11}{30}$; $\frac{1233}{990}$.

Zadatak 4. $\frac{110}{7} = 15.\dot{7}1428\dot{5}$.

Zadatak 5.

$$3.\dot{9} = 4$$
$$3 + 0.9 + 0.09 + \ldots = 4$$
$$3 + \frac{9 \cdot 10^{-1}}{1 - 10^{-1}} = 4$$
$$3 + \frac{9}{9} = 4$$
$$4 = 4$$

$$2.4\dot{5}\dot{4} = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$2.4 + 0.054 + 0.00054 + \ldots = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$\frac{24}{10} + 54 \cdot 10^{-3} + 54 \cdot 10^{-5} = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$\frac{12}{5} + \frac{54 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}} = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$\frac{12}{5} + \frac{54}{10^3 \cdot 0.99} = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$\frac{12}{5} + \frac{54}{990} = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$\frac{12}{5} + \frac{3}{55} = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$\frac{132+3}{55} = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$\frac{135}{55} = 2.\dot{4}\dot{5}$$
$$2.\dot{4}\dot{5} = 2.\dot{4}\dot{5}$$

1. Brojevi

Rješenja 1.1

1. 61, 51, 375, 189, 1290, 3640.

2. **1)** 11, **2)** 37, **3)** 101, **4)** 395, **5)** 9, **6)** 20, **7)** 86, **8)** 1665, **9)** 8, **10)** 32, **11)** 58, **12)** 11953.

3. $6 = 110_{(2)} = 6_{(8)} = 6_{(16)}$, $13 = 1101_{(2)} = 15_{(8)} = \mathrm{D}_{(16)}$, $25 = 11001_{(2)} = 31_{(8)} = 19_{(16)}$, $125 = 1111101_{(2)} = 175_{(8)} = 7\mathrm{D}_{(16)}$.

4. $6 = 11_{(5)} = 6_{(9)} = 6_{(12)}$, $13 = 23_{(5)} = 14_{(9)} = 11_{(12)}$, $25 = 100_{(5)} = 27_{(9)} = 21_{(12)}$, $125 = 1000_{(5)} = 148_{(9)} = \mathrm{A}5_{(12)}$.

5. U bazi 2: 1011, 100 001, 1 100 100, 11 011 110, 1 111 101 001. U bazi 5: 21, 113, 400, 1342, 13 001. U bazi 12: B, 29, 84, 166, 6B5.

6. $15_{(8)} = \mathrm{D}_{(16)}$, $306_{(8)} = \mathrm{C}6_{(16)}$, $314563_{(8)} = 19973_{(16)}$.

7. $130_{(8)}$, $642_{(8)}$, $177777_{(8)}$.

8. $93_{(16)}$, $14\mathrm{F}_{(16)}$, $142\mathrm{B}_{(16)}$.

9. 10 111, 1 100, 1 100 101, 1 111 111, 100 000

10. 56, 101, 350, 1364.

11. **1)** $7\mathrm{AB}7_{(16)}$=$111101010110111_{(2)}$=$75267_{(8)}$;
2) $34567_{(8)} = 11100101110111_{(2)} = 3977_{(16)}$.

12. **1)** $8\,EF8_{(16)} = 1\,000\,111\,011\,111\,000_{(2)} = 107\,370_{(8)}$;
2) $76543_{(8)} = 111110101100011_{(2)} = 7\mathrm{D}63_{(16)}$.

13. **1)** 22, 100, 101, 102, 110...
2) 1010, 1011, 1100, 1101, 1110...
3) 13, 20, 21, 22, 23...
4) 33, 34, 35, 40, 41...

14. **1)** 1111, 1110, 1101, 1100...
2) 1100, 1110, 10 000, 10 010...
3) 200, 210, 220, 1000...
4) 31, 33, 40, 42, 44...

15. $2300_5 = 325$.

16. **1)** Iz uvjeta $23_{(x)} \cdot 15_{(x)} = 411_{(x)}$ slijedi jednadžba $(2x+3)(x+5) = 4x^2 + x + 1$, čije je pozitivno rješenje $x = 7$.
2) Ne postoji takva baza. **3)** $x = 5$.

17. **1)** Jednakost glasi $(x^2+1)+(x^3+1) = x^3+x^2+x$ odakle slijedi $x = 2$.
2) Sada je $(x^3+2x^2+x+1) - (x^3+x^2+2x) = 2x+1$ odakle slijedi $x = 3$.

18. Vrijede u svakom sustavu osim u binarnom.

19. Pretvorimo račun u dekadski sustav. Iz jednadžbe $(x-1)+x+(x+1) = 121_{(5)} = 36$ dobivamo $3x = 36$ te je $x = 12 = 22_{(5)}$. Traženi brojevi su $21_{(5)}$, $22_{(5)}$, $23_{(5)}$.

20. $11\,110_{(2)} = 1000_{(2)} + 1010_{(2)} + 1100_{(2)}$.

21. $4_{(5)}$, $10_{(5)}$, $11_{(5)}$.

22. $10_{(9)}$, $11_{(9)}$, $12_{(9)}$.

23. $101_{(2)}$, $111_{(2)}$.

24. **1)** $x = 2y-1$, $y > 4$; **2)** $y = x+2$, $x > 4$.

25. **1)** $32_{(5)} = 23_{(7)}$; **2)** $25a+5b+c = 64c+8b+a$ daje $63c = 24a-3b$, tj. $b = 8a-21c$. $a = 3$, $c = 1$, $b = 3$, $331_{(5)} = 133_{(8)}$;
3) $313_{(4)} = 131_{(6)}$.

26. U svakom, jer je $(x^2+1)(x+1) = x^3+x^2+x+1$ identitet za sve x. Isto vrijedi i za $(x^3+1)(x^2+x+1) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

27. U sustavu s bazom 4, jer iz $(x+1)(x+2)(x+3) = 3x^3+x^2+2$ dobivamo jednadžbu $2x^3-5x^2-11x-4 = 0$, čije je jedino prirodno rješenje $x = 4$.

28. $144_{(n)} = n^2+4n+4 = (n+2)^2$. U svakom sustavu s bazom n, $n > 4$.

29. U sustavu s bazom 7.

30. Iz jednadžbe $(2x+4)^2 = 6x^2+2x$ dobije se $x = 8$.

31. U sustavu s bazom 5.

32. U svakom sustavu s bazom n, $n > 3$, jer je $1331_{(n)} = n^3+3n^2+3n+1 = (n+1)^3$. Baza mora biti veća od 3 jer se u zapisu broja pojavljuje znamenka 3.

33. Iz $1331 = 33^2$ slijedi $(x+3)^3 = 9(x+1)^2$ te je $x = 8$. Zatim je $\sqrt{2420_{(8)}} = 44_{(8)}$.

34. To je sustav s bazom 5; $23_{(5)} \cdot 32_{(5)} = 1341_{(5)}$.

35. To je sustav s bazom 4; $\sqrt{3201_{(4)}} = 33_{(4)}$.

36. Danu jednakost možemo zapisati u obliku $2(2x+1)(x+1) = (x^2+2)(x+1)$. Odatle dobijemo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 4x = 0$ te je $x = 4$; $22_{(4)} \cdot 12_{(4)} = 330_{(4)}$.

37. **1)** $100010_{(2)}$; **2)** $101100_{(2)}$; **3)** $11100100_{(2)}$; **4)** $100110000_{(2)}$.

38. **1)** $110_{(2)}$; **2)** $1100_{(2)}$; **3)** $11101_{(2)}$; **4)** $100101100_{(2)}$.

39. **1)** $10010_{(2)}$; **2)** $1000001_{(2)}$; **3)** $11110011_{(2)}$; **4)** $100110101011_{(2)}$.

40. $10220_{(3)}$, $10011212_{(3)}$, $1010221_{(3)}$.

42. **1)** 3.5; **2)** 5.625; **3)** 7.875; **4)** 8.0625.

43. Brojeve treba prikazati po potencijama od 2 i $\frac{1}{2}$.
1) $0.1_{(2)}$; **2)** $0.001_{(2)}$; **3)** $1.1_{(2)}$; **4)** $0.0\ldots01_{(2)}$ ($n-1$ nula); **5)** $0.01_{(2)}$; **6)** $10.1_{(2)}$; **7)** $1100.001_{(2)}$; **8)** $10.0001_{(2)}$.

Rješenja 1.2

2. **1)** Za $n = 1$ tvrdnja je očito točna. Pretpostavimo da je točna i za $n = k$. Izračunajmo onda $-3+3+\ldots+(6k-9)+(6(k+1)-9)$. Radi pretpostavke indukcije smijemo koristiti jednakost $-3+3+\ldots+(6k-9) = 3k^2-6k$ pa čitava suma iznosi $3k^2-6k+6k+6-9 = 3k^2-3 = 3(k+1)^2-6(k+1)$, dakle, jednakost vrijedi i za broj $n = k+1$.

5. **1)** $2^n - 1$, **2)** $\frac{1}{2}(3^n-1)$, **3)** $\dfrac{n-1}{n}$.

10. **1)** $n(3n+1)$; **2)** $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$; **3)** $\dfrac{n(4n^2+6n-1)}{3}$; **4)** $n(n+1)^2$; **5)** $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$; **6)** $\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$.

12. **1)** Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalno ispunjena. Za $n = 2$ bilo bi $|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|$. Dokažimo to. Zbrajanjem očitih nejednakosti: $-|a_1| \leqslant a_1 \leqslant |a_1|$, $-|a_2| \leqslant a_2 \leqslant |a_2|$ dobivamo $-(|a_1|+|a_2|) \leqslant a_1 + a_2 \leqslant |a_1| + |a_2|$, što je ekvivalentno s $|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|$.
Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja zadatka za k pribrojnika. Onda je

$$\begin{aligned}&|a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}|\\ &\quad\leqslant |a_1 + \ldots + a_k| + |a_{k+1}|\\ &\quad\leqslant |a_1| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|.\end{aligned}$$

14. **1)** Izraz $(n+1)^3 + 11(n+1)$ napiši u obliku $n^3 + 11n + 3(n(n+1)+4)$ i iskoristi pretpostavku indukcije.

15. **1)** Za $n = 1$ je $7^n + 3n - 1 = 9$. Pretpostavimo da za $n = k$ vrijedi $7^k + 3k - 1 = 9a$. Tada je i $7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7(7^k + 3k - 1) - 18k + 9 = 7 \cdot 9a - 9(2k-1)$, što je očito broj djeljiv s 9.
2) Uvrstimo li $n = 1$, dobit ćemo broj $36 + 27 + 3 = 66$, koji je djeljiv s 11. Pretpostavimo da je $6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k = 11a$. Dokažimo kako je onda i $6^{2(k+1)} + 3^{k+3} + 3^{k+1}$ djeljiv s 11. Preuredimo zapis ovog broja kako bismo mogli iskoristiti pretpostavku: $36(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) - 11 \cdot 3^{k+3} - 11 \cdot 3^{k+1}$. Zaključak provedi do kraja.

16. **1)** Za $n = 1$ imamo $4 > 1$. Pretpostavimo da za neki $n = k$, $4^k > k^2$. Treba dokazati da iz toga slijedi $4^{k+1} > (k+1)^2$. No prema pretpostavci je $4^{k+1} = 4 \cdot 4^k \geqslant 4k^2$. Dalje, zbog $k^2 \geqslant k$ i $k^2 \geqslant 1$, vrijedi $4k^2 \geqslant k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.
2) Za $n = 1$, $2 > 1$. Neka je $2^k > k^2 - 2k + 2$. Dokažimo $2^{k+1} > (k+1)^2 - 2(k+1) + 2 = k^2 + 1$. Imamo nejednakosti $2^k > k^2 - 2k + 2$ i $2^k > 2k - 1$. Njihovim zbrajanjem dobiva se $2 \cdot 2^k > k^2 + 1$. Valja još samo matematičkom indukcijom provjeriti nejednakost $2^k > 2k - 1$.

17. **1)** 1° $3^3 > 17$; 2° Ako je $3^k > 2^k + 3k$, dokažimo da je onda $3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1)$. Zbrojimo nejednakosti $2 \cdot 3^k > 2 \cdot 2^k + 6k$ (pretpostavka) i $3^k > 3$ (za $k \geqslant 3$). Tad imamo $3^{k+1} > 2 \cdot 2^k + 6k + 3 > 2 \cdot 2^k + 3k + 3$, a odatle $3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1)$.
2) 1° Za $n = 3$, $27 > 12$. 2° Ako je $k^3 > 3k + 3$, onda je $(k+1)^3 > 3(k+1) + 3$. Dokažimo to! Imamo dvije nejednakosti: $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ daje $3k^2 + 3k + 1 > 3$, za $k \geqslant 3$,

a pretpostavka je $k^3 > 3k+3$. Zbrojivši te dvije nejednakosti dobivamo $(k+1)^3 > 3(k+1)+3$.

18. Za $k=1$ je $7+7^2+7^3+7^4=2800$, broj djeljiv sa 100. Pretpostavimo da je za neki prirodni broj k broj $7+7^2+\ldots+7^{4k}$ djeljiv sa 100. No onda je broj $7+7^2+\ldots+7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}+7^{4k+4}=(7+7^2+\ldots+7^{4k})+7^{4k}(1+7+49+343)$ također djeljiv sa 100. Broj u prvoj zagradi djeljiv je sa 100 po pretpostavci, a drugi je pribrojnik jednak $400\cdot 7^{4k}$, dakle, također djeljiv sa 100. Zapravo, iz dokaza vidimo da je zadani broj uvijek djeljiv s 2800.

19. Za $n=2$ je $2^{2^2}+1=17$, pa baza indukcije vrijedi. Pretpostavimo da broj $2^{2^k}+1$ za neki prirodni broj k završava znamenkom 7, pa dokažimo da tada i broj $2^{2^{k+1}}+1$ završava znamenkom 7. Po pretpostavci je $2^{2^k}+1$ oblika $10a+7$, odnosno vrijedi $2^{2^k}=10a+6$, gdje je a prirodan broj. Sada možemo pisati

$$2^{2^{k+1}}+1=2^{2^k\cdot 2}+1=\left(2^{2^k}\right)^2+1$$
$$=(10a+6)^2+1=100a^2+120a+37,$$

a to je očito broj kojem je posljednja znamenka 7.

Rješenja 1.3

1. **1)** $408\,240$; **2)** $479\,001\,599$; **3)** $6\,375\,600$; **4)** 36.

2. **1)** $18!$; **2)** $12!$; **3)** $(n+1)!$; **4)** $(n-1)!$.

3. **1)** $15\cdot 14$; **2)** $8\cdot 7\cdot 6$; **3)** $n(n-1)$; **4)** $n(n+1)$; **5)** $2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)$; **6)** $(n+k)(n+k-1)$; **7)** $(n+1)n(n-1)$; **8)** $\dfrac{1}{(2n-2)!}$.

4. **1)** $\dfrac{73}{9\cdot 8\cdot 7!}=\dfrac{73}{9!}$; **2)** $\dfrac{65}{8!}$; **3)** 24; **4)** 98^2; **5)** 1580; **6)** 1275.

5. **1)** $\dfrac{n}{(n+1)!}$; **2)** $\dfrac{n-1}{n!}$; **3)** $\dfrac{(n-1)^2}{n}$; **4)** 1.

6. **1)** $n=7$; **2)** $k=4$; **3)** $k=5$; **4)** $n_1=2$, $n_2=3$.

7. $1+2+6+24+120+\ldots=3+10\cdot k$. Posljednja znamenka je 3.

9. 45, 126, 816, 120, 495.

12. **1)** $n=8$; **2)** $n=7$; **3)** $n=5$; **4)** $n=3$ ili $n=14$; **5)** $n=5$; **6)** $n=17$.

13. **1)** $x=4$ ili $x=5$; **2)** $x=6$; **3)** $x=7$; **4)** $x=8$.

15. **1)** $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$;
2) $32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$;
5) $x^5-5x^3+10x-\dfrac{10}{x}+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}$;
8) $485-198\sqrt{6}$.

16. **1)** $162x^4+108x^2+2$.

19. Iz jednakosti $\binom{n}{n-3}(4)^3\cdot 3^{n-3}=\binom{n}{n-4}(4)^4\cdot 3^{n-4}$ slijedi $n=6$. Koeficijenti iznose $34\,560$.

20. $n=14$.

21. Iz prvog uvjeta slijedi $n=12$. Član koji ne sadrži x je deveti po redu, on iznosi $\binom{12}{8}$.

22. To je sedmi član i iznosi $\binom{12}{6}\cdot\dfrac{1}{2^6}a^{13}$.

23. **1)** $112x^6$; **2)** $198x^5$; **3)** 15, peti član u razvoju; **4)** 28, sedmi član u razvoju.

24. $\operatorname{Im} z=8$.

25. $331\,695$.

26. $-572\sqrt{2}$.

27. $n=11$, treći je član raspisa jednak $55\cdot x^5\sqrt{x}$, a slobodni član je 165.

28. $n=11$, četvrti je član raspisa jednak $165x^{11}$, a slobodni član je 55.

29. Postoji, to je 13. član.

30. Ne postoji.

31. Postoji, to je 4. član.

32. $n=8$, $28x^4$.

33. Zbroj koeficijenata dobijemo kad u rastav binoma uvrstimo $x=1$, $y=1$. Učinimo li to odmah, vidimo da je taj zbroj jednak 1.

34. $x=10$.

Rješenja 1.4

1. 839, 929, 22 279

2. Parni su brojevi složeni. Izdvojimo li brojeve koji su djeljivi s 3 i s 5, preostaje provjeriti sljedeće

brojeve: 26963, 26969, 26971, 26977. $26963 = 59 \cdot 457$, $26969 = 149 \cdot 181$, $26971 = 7 \cdot 3853$, $26977 = 53 \cdot 509$.

3. $312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$, $556 = 2^2 \cdot 139$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $5828 = 2^2 \cdot 31 \cdot 47$, $12481 = 7 \cdot 1783$.

5. Svi su brojevi djeljivi sa 7.

6. Podijeli na džepnom računalu 100020003 sa 7. Dobije se kvocijent 14288571 i ostatak 6. Nas zanima samo ostatak, koji pridružujemo preostalim znamenkama broja i dobivamo novi broj koji treba testirati: 600020001. On je djeljiv sa 7.

7. Tvrdnja se temelji na identitetu $4(10x + y) = x + 4y + 39x$.

10. Iz jednadžbe $\dfrac{2n(2n+1)}{2} - \dfrac{n(n+1)}{2} = 187$, odnosno $3n^2 + n - 374 = 0$, dobijemo $n = 11$. (Drugo je rješenje $-34/3$.) Onda je $S_{33} = 561$.

11. Tvrdnja slijedi iz identiteta
$(n-1)n(n+1)(n+2) + 1 = (n^2 + n - 1)^2$.

12. Ovaj će broj biti djeljiv s 5 ako n^2 završava na 8 ili na 3. No kvadrat prirodnog broja završava samo znamenkama 0, 1, 4, 9, 5 i 6.

13. Prvi i treći broj jesu, a drugi nije potpuni kvadrat.

14. $n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. Radi se o umnošku pet uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je barem jedan djeljiv s 5, barem jedan s 3 i barem dva s 2, od kojih barem jedan s 4.

15. $k = 1$, $n = 472$; $k = 2$, $n = 236$ i $k = 4$, $n = 118$.

16. Djelitelj je 20, a ostatak 17.

17. 13.

18. Označimo sa n traženi broj. Broj $n + 1$ djeljiv je sa 2, 3, 5, i 7. Dakle je to broj tipa $210k$, gdje je k cijeli broj. Najmanji k za koji se dobije najmanji četveroznamenkast n je $k = 5$, te je $n = 1049$.

19. Kako se radi o umnošku cijelih brojeva, jednakost će biti ispunjena ako su sva tri faktora jednaka 1. Tada je $x = 3$, $y = 0$, $z = 4$. No, dva od tri faktora u umnošku mogu biti jednaka -1, a treći 1, pa imamo još i ova rješenja: $(1, -6, 4)$, $(1, -4, 2)$, $(3, -6, 2)$.

20. $x = -4$ ili $x = 11$.

21. **1)** $x = 53$, $y = 52$; $x = 19$, $y = 16$; $x = 13$, $y = 8$; $x = 11$, $y = 4$. **2)** $x = 8$, $y = 5$.
3) $x = 0$, $y = 0$ ili $x = 2$, $y = 2$.
4) Četiri rješenja: $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$ i $(0, 2)$.

22. Zbroj svih deset brojeva jednak je 110. Najveći mogući od 10 brojeva je broj $110 - (1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = 65$.

23. Zbroj svih 27 brojeva je $27 \cdot 72 = 1944$. Kad od toga broja oduzmemo $13 + 41 = 55$, dobit ćemo broj $1\,889$. Podijelimo li $1\,889$ s 25, dobit ćemo 75.56, aritmetičku sredinu ostalih 25 brojeva.

24. $c = \dfrac{5}{18}$.

25. $a = 366$, $b = 610$, $c = 732$.

26. $\dfrac{3}{5}$.

27. $a : b = 3$.

28. Neka je $x + y = 750$. Tada je $0.08x + 0.24y = 0.112 \cdot 750 = 84$. Ovo je sustav jednadžbi iz kojega se dobije $x = 600$, $y = 150$. Provjera pokazuje da je rezultat točan. Naime, vrijedi: $0.08 \cdot 600 = 48$, zatim $0.24 \cdot 150 = 36$, te je $48 + 36 = 84$, a već smo izračunali $84 = 0.112 \cdot 750$.

30. Izračunaj $A - B$.

31. **1)** Usporedi brojeve $1 - A$ i $1 - B$.
2) Ako je $A = \dfrac{a}{b}$, onda je $B = \dfrac{a+1}{b+1}$. Promotri razliku $A - B$.

32. $a < b \implies ac < bc \implies ab + ac < ab + bc \implies a(b+c) < b(a+c) \implies \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$.

33. Kvadriranjem nejednakosti $a + b \geqslant 1$, dobit ćemo $a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 1$. Ovoj pak nejednakosti dodamo očitu nejednakost $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$ te imamo $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$. Ponovimo postupak s ovom, novom nejednakošću!

36. Prikažimo u obliku razlomka broj a. Pomnožimo a sa 100, te je $100a = 36.363636\ldots$ Oduzimanjem od ove jednakosti broja $a = 0.363636\ldots$ dobit ćemo $99a = 36$, odnosno, nakon kraćenja, $a = \frac{4}{11}$.
Analogno postupi s ostalim dvama brojevima.

38. Postupkom opisanim u prethodnom zadatku najprije ćemo dobiti $a = \dfrac{59}{111}$, $b = \dfrac{97}{111}$, te je $a + b = \dfrac{52}{37}$, $a - b = -\dfrac{38}{111}$.

40. $a=\frac{7}{8}$, $b=\frac{14}{11}$, $\frac{a}{b}=\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{14}=\frac{11}{16}=0.6875$.

41. $a=\frac{11}{12}$, $b=\frac{4}{11}$, $a\cdot b=\frac{1}{3}$

42. Dani ćemo razlomak raspisati na sljedeći način: $\frac{m^2-2m+1}{m+2}=\frac{(m+2)^2-6m-3}{m+2}=\frac{(m+2)^2-6(m+2)+9}{m+2}=m+2-6+\frac{9}{m+2}=m-4+\frac{9}{m+2}$.

Sada dalje zaključujemo:

Kako je $m-4$ cijeli broj za svaki cijeli broj m, onda će razlomak $\frac{m^2-2m+1}{m+2}$ biti cijeli broj kad cijeli broj bude razlomak $\frac{9}{m+2}$. No za to je dovoljno da je $m+2$ djelitelj od 9. Dakle je $m+2\in\{\pm1,\pm3,\pm9\}$.

Tako je rješenje zadatka $m\in\{-11,-5,-3,-1,1,7\}$.

43. $\frac{12}{7}$.

44. **1)** $x=\pm\frac{1}{5}$; **2)** $x=\pm\frac{5}{12}$.

45. To su brojevi $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$.

48. Npr., $\frac{121}{196}$, rješenja ima beskonačno mnogo.

Rješenja 1.5

1. Pretpostavimo da je $\sqrt{3}$ racionalan. On se tada može prikazati u obliku $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$, gdje su m i n prirodni brojevi koji su relativno prosti (razlomak je do kraja skraćen). Kvadriranjem jednakosti $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$ dobivamo $3=\frac{m^2}{n^2}$, odnosno $m^2=3n^2$. Kako je m^2 djeljiv s 3, s 3 mora biti djeljiv i broj m. Zato je on oblika $m=3k$ pa dobivamo $3k^2=n^2$ te je i n djeljiv s 3. Kako po pretpostavci brojevi m i n nemaju zajedničkog djelitelja, time smo dobili kontradikciju. To znači da $\sqrt{3}$ nije racionalan. Analogno se dokazuje da su brojevi $\sqrt[3]{3}$ i $\sqrt[4]{2}$ također iracionalni.

2. Uzmimo da je broj a racionalan, a broj b iracionalan. Pretpostavimo da je broj $c=a+b$ racionalan. No tada je $c-a=b$ racionalan broj. To je proturječno uvjetu u zadatku.

3. Pretpostavi da je broj racionalan, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=u$ i kvadriraj jednakost $\sqrt{x}=u-\sqrt{y}$.

4. Pretpostavimo da je broj $c=a+b\sqrt{2}$ racionalan. Kvadrirajmo ovaj izraz. Dobit ćemo $c^2=a^2+2ab2\sqrt{2}+2b^2$. Odatle je $\sqrt{2}=\frac{c^2-2b^2}{2ab}$. S lijeve strane ove jednakosti je iracionalan broj $\sqrt{2}$ a s desne racionalan broj. Kako je ta jednakost kontradiktorna, a proistekla je iz pretpostavke da je $c=a+b\sqrt{2}$ racionalan, onda je ta pretpostavka pogrešna. Dakle je $a+b\sqrt{2}$ iracionalan.

5. Pretpostavimo da je $\sqrt[n]{a}$ racionalan, tj. da je $\sqrt[n]{a}=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbf{N}$, $q\neq1$, te $M(p,q)=1$. Tada je $a=\frac{p^n}{q^n}$. Označimo s k neki prost djelitelj od q. No tada je p^n djeljiv s k, odnosno p je djeljiv s k. To proturječi uvjetu $M(p,q)=1$. Dakle, $\sqrt[n]{a}$ je iracionalan broj.

6. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionalan broj, tj. da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$, $a\in\mathbf{Q}$. Kvadrirajmo ovu jednakost: $2+2\sqrt{6}+3=a^2$. Odatle je $\sqrt{6}=\frac{a^2-5}{2}$. S lijeve strane je iracionalan broj $\sqrt{6}$, a s desne strane racionalan (jer je a racionalan po pretpostavci). Takva je jednakost proturječna, te a nije racionalan.

7. **1)** Zapiši $\sqrt{2}=\frac{x^3+6x-3}{3x^2+2}$, gdje je $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ i provedi zaključak.

9. **1)** Stavimo $x=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. Kvadriranjem dobivamo
$x^2=6+2\sqrt{5}-2\sqrt{(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}+6-2\sqrt{5}=12-2\sqrt{16}=4$ pa je $x=2$.

3) Stavimo $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=x$. Nakon kubiranja dobivamo
$4-3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})=x^3$, što možemo zapisati u obliku $x^3+3x-4=0$. Lijevu stranu ove jednadžbe lako rastavimo u faktore te je $(x-1)(x^2+x+4)=0$. Ova jednadžba ima jedno realno rješenje, broj $x=1$. Kako je

$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ njezin korijen, a realan je broj, on je jednak 1.

10. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{4+4\sqrt{5}+5}=\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}=2+\sqrt{5}$. Koristeći ovaj prikaz, za drugi dobivamo vrijednost drugog broja: $\sqrt{5}-2$.

11. **1)** Pretpostavimo da je ovaj broj racionalan, što znači da je periodičan. To onda znači da postoji skupina od n znamenaka koja se u nekom trenutku počne periodično ponavljati. No u ispisivanju toga broja kad–tad doći će na red za ispis i broj 10^n u čijem je zapisu točno n nula. To bi onda značilo kako se period sastoji od n nula, a takav bi broj bio konačan. Naš broj to očito nije. Pretpostavka je pogrešna — broj nije racionalan.

Analogno se dokazuju i ostale tri tvrdnje.

12. Stavit ćemo $\sqrt{4x^2+x-1}=2x+a$, $2x+a\geqslant 0$. Odatle je $x=\dfrac{a^2+1}{1-4a}$, gdje je $a\neq\frac{1}{4}$ proizvoljan racionalan broj koji zadovoljava uvjet $2x+a\geqslant 0$.

13. **1)** Pretpostavimo da je broj $\log_2 3$ racionalan tj., da je moguć zapis $\log_2 3=\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbf{N}$. No ta je jednakost ekvivalentna kontradiktornoj $2^a=3^b$, jer je slijeva paran, a zdesna neparan broj, pa kako je posljedica pretpostavke, ta je pretpostavka pogrešna.

2) Kao pod **1)**, dobije se $18^a=36^b$, odnosno $18^{a-b}=2^b$, $a>b$. Broj s lijeve strane djeljiv je s 3, a broj s desne to nije.

14. **1)** $\cos 15^\circ=\sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2) Na sličan način. **3)** Pretpostavimo da je $\operatorname{tg} 5^\circ$ racionalan. Tada je $\operatorname{tg} 10^\circ=\dfrac{2\operatorname{tg} 5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 5^\circ}$ racionalan, pa je racionalan i $\operatorname{tg} 15^\circ=\operatorname{tg}(10^\circ+5^\circ)$, a onda i $\operatorname{tg} 30^\circ=\dfrac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$. No to je kontradikcija jer je $\operatorname{tg} 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ iracionalan broj. **4)** Označimo $\cos 20^\circ=x$. Taj je broj korijen jednadžbe $\cos 60^\circ=4\cos^3 20^\circ-3\cos 20^\circ$, odnosno jednadžbe $8x^3-6x-1=0$. Pokazat ćemo da ova jednadžba nema racionalnih korijena, što će značiti da onda ni $\cos 20^\circ$, koji je jedan od njezinih triju korijena, nije racionalan. Uz supstituciju $y=2x$ dobivamo jednadžbu $y^3-2y-1=0$. Jedina moguća racionalna rješenja ove jednadžbe su brojevi ± 1. No ti brojevi nisu rješenja, pa stoga ni početna jednadžba nema racionalnih rješenja.

15. Dokaži najprije rekurzivnu jednakost $\cos(k+1)^\circ=2\cos k^\circ\cos 1^\circ-\cos(k-1)^\circ$. Pretpostavimo da je $\cos 1^\circ$ racionalan broj. Onda će iz dokazane jednakosti slijediti da su racionalni i brojevi $\cos 2^\circ$, $\cos 3^\circ,\ldots,$ $\cos 30^\circ$. No $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ i on nije racionalan. Pretpostavka je, dakle, bila pogrešna, te ni $\cos 1^\circ$ nije racionalan.

16. Pretpostavi da je $\operatorname{tg} 1^\circ$ racionalan. Primjenjujući uzastopno formulu $\operatorname{tg}(k+1)^\circ=\dfrac{\operatorname{tg} k^\circ+\operatorname{tg} 1^\circ}{1-\operatorname{tg} k^\circ\operatorname{tg} 1^\circ}$ zaključit ćemo da je i $\operatorname{tg} 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ racionalan, što nije. Onda nije racionalan niti broj $\operatorname{tg} 1^\circ$.

21. U svakoj od zagrada je negativan broj pa je njegova apsolutna vrijednost njemu suprotan broj. Tako je dani izraz jednak: $-1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{100}=-101+2\sqrt{2}$.

22. Očito je $x\in\langle 5,6\rangle$. Tako je $\lfloor x\rfloor=5$ te je onda $x=\dfrac{28}{5}$.

23. 217.

24. Možemo zapisati: $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{5}{2}}\cdot\ldots\cdot 2^{\frac{2k-1}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\ldots+\frac{2k-1}{2}}>256=2^8$.

Onda je $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}+\ldots+\dfrac{2k-1}{2}>8$. No zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je n^2, pa imamo nejednadžbu $\frac{1}{2}k^2>8$, odakle je $k^2>16$.

Najmanji cijeli broj k koji zadovoljava uvjete zadatka je $k=5$.

25. Zbroj je jednak 9. Racionaliziraj svaki pribrojnik.

26. Potrebno je odrediti uklopljene intervale $[a_n,a_n']$ unutar kojih leži broj $\sqrt{5}$.

27. Odredi intervale $[a_n,a_n']$, $[b_n,b_n']$ takve da je $a_n<\sqrt{2}<a_n'$, $b_n<\sqrt{3}<b_n'$. Onda je $a_n+b_n<\sqrt{2}+\sqrt{3}<a_n'+b_n'$.

29. Neka je $[a,b]$ interval s racionalnim krajevima, x bilo koji pozitivan iracionalni broj koji leži unutar intervala $[n-1,n]$ za neki $n\in\mathbf{N}$. Onda je $a+\dfrac{b-a}{n}x$ iracionalan broj koji leži unutar intervala $[a,b]$.

30. **1)** $\langle 1,9]$; **2)** $[0,9]$; **3)** $\langle -2,0]$; **4)** $\left[-\frac{9}{4},0\right]$; **5)** $\left[-\frac{9}{4},4\right\rangle$; **6)** $[-1,3]$.

31. **1)** $\inf S = \min S = -6$, $\sup S = \max S = 2$. **2)** $\inf S = \min S = -6$, $\sup S = 3$, maksimum ne postoji. **3)** Isto. **4)** $\inf S = -\sqrt{3}$, $\sup S = \sqrt{3}$, minimum i maksimum ne postoje. **5)** $\inf S = 0$, $\sup S = 1$, minimum i maksimum ne postoje.

32. **1)** $\inf S = \min S = 1$, $\sup S = \max S = 2$. **2)** $\inf S = \min S = 0$, $\sup S = \ln 20$, maksimum ne postoji. **3)** $\inf S = \min S = 0$, $\sup S = 9$, maksimum ne postoji. **4)** $\inf S = 1$, $\sup S = 9$, minimum i maksimum ne postoje.

33. **1)** $\inf S = \min S = 0$, $\sup S = \infty$; **2)** $\inf S = \min S = 0$, $\sup S = \max S = \frac{3}{2}$; **3)** $\inf S = \min S = \frac{1}{2}$, $\sup S = 1$.

Rješenja 1.6

1. **1)** $1-2i$; **2)** $7+17i$; **3)** $-9+46i$; **4)** $-7+24i$; **5)** i; **6)** 0; **7)** $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$; **8)** $\frac{6}{5}$.

2. **1)** $-2+\frac{3}{2}i$; **2)** 2; **3)** $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

4. Točke kružnice polumjera 1, sa središtem u ishodištu.

5. Stavi $z = x+iy$ i izračunaj realni dio broja w.

6. Svi brojevi koji leže na realnoj osi ili na kružnici $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

7. $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$, $z_4 = -1$, $z_5 = -i$.

8. **1)** Hiperbola $xy = 1$. **2)** Elipsa $4x^2+3y^2=12$. **3)** Pravac $y = x$. **4)** Parabola $x = \frac{1}{2}(y^2-1)$. **5)** Elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7} = 1$, sa žarištima $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ i velikom osi $2a = 8$. **6)** Dio hiperbole $12x^2 - 4y^2 = 3$ za koji je $x > 0$. **7)** Točke s kružnice $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$. **8)** Pravac $y = -x+2$. **9)** Točke s kružnice kojoj je promjer spojnica točaka (x_1,y_1) i (x_2,y_2). **10)** Pravac koji prolazi točkama (x_1,y_1) i (x_2,y_2).

9. **1)** Vanjština kruga s polumjerom 1 i središtem u točki $(1,0)$; **2)** vanjština kruga sa središtem u $(-2,3)$ i polumjerom 2. **3)** Prsten sa središtem u točki $(0,1)$, unutarnjeg polumjera 1 i vanjskog 3. **4)** Kut s vrhom u ishodištu koji zatvaraju zrake s kutom $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ prema pozitivnom dijelu realne osi. **5)** Dio ispod parabole $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$. **6)** Unija dvaju krugova: $x^2+(y-1)^2 = 2$, $x^2+(y+1)^2 = 2$.

13. **1)** $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; **2)** $\varphi = \frac{4\pi}{3}$; **3)** $\varphi = \frac{11\pi}{6}$; **4)** Iz sustava $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{37}}$, $\sin\varphi = \frac{6}{\sqrt{37}}$ dobiva se $\varphi = 99°27'44''$.

14. **1)** $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; **2)** $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; **3)** $4\left(\cos 0+i\sin 0\right)$; **4)** $6\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$; **5)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; **6)** $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; **7)** $\sqrt{5}\left(\cos 63°26'+i\sin 63°26'\right)$; **8)** $\sqrt{13}\left(\cos 326°18'+i\sin 326°18'\right)$.

15. **1)** $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; **2)** $z = \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; **3)** $z = \sqrt{2}(\cos 0+i\sin 0)$; **4)** $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; **5)** $z = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$; **6)** $z = \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$.

16. **1)** $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; **2)** $z_2 = \cos\frac{16\pi}{17}+i\sin\frac{16\pi}{17}$; **3)** $z_3 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$; **4)** $z_4 = 3\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$; **5)** $z_5 = 2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

17. **1)** $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; **2)** $z = \cos\frac{10\pi}{11}+i\sin\frac{10\pi}{11}$; **3)** $z = 3\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$; **4)** $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$;

5) $z = 2\cos\frac{5\pi}{9}\Big(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\Big)$;
6) $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

18. **1)** $\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}$;
3) $\frac{1}{2}\big(\cos 0 + i\sin 0\big)$;
5) $4\Big(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\Big)$.

19. **1)** $2\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\Big)$;
2) $\frac{\sqrt{3}}{3}\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)$.

20. **1)** $z = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\Big)$;
2) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$;
3) $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;
4) $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}}\Big(\cos\frac{11\pi}{20} + i\sin\frac{11\pi}{20}\Big)$.

Rješenja 1.7

1. $z_1^3 = \frac{8}{27}\Big(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\Big)$, $z_2^4 = \frac{81}{256}\Big(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\Big)$

2. **1)** i; **2)** -2^{10}; **3)** $\frac{9}{2}\sqrt{3} + i\frac{27}{2}$; **4)** $-2^{14}i$.

3. **1)** -8; **2)** $-8 - 8i\sqrt{3}$; **3)** -4; **4)** $-8i$;
5) $-\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$; **6)** $-\frac{i}{81}$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\cos\frac{31\pi}{16} + i\sin\frac{31\pi}{16}\Big)$.

5. **1)** $2^{13}\Big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\Big)$; **2)** $32\sqrt{2}\Big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\Big)$; **3)** $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

6. $(1+z)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$

7. **1)** $a = 1$, $b = 1$, $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

$$(1+i)^n = \Big[\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big)\Big]^n = (\sqrt{2})^n\Big(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\Big);$$

2) $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$;

$$(\sqrt{3} - i)^n = \Big[2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big)\Big]^n = 2^n\Big(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\Big).$$

8. $(-1)^n \cdot 2\cos\frac{n\pi}{3}$.

9. **1)** $-\dfrac{i}{6^3\cos^6\frac{\pi}{12}}$.

10. **1)** $\cos 0 + i\sin 0 = 1$;
2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\Big)$;
3) $\cos 0 + i\sin 0$;
4) $\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)$.

11. **1)** $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

12. **1)** Izdvoji realni i imaginarni dio u jednakosti $\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$.

13. Iz uvjeta slijedi $x^2 - 2\cos\alpha x + 1 = 0$ odakle je $x_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Zato je $x^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha$, $x^{-n} = \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha$ te je $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.

14. **1)** $\pm\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\Big)$; **2)** $\pm(2+i)$;
3) $\pm\sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big)$.

15. **1)** -1, $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; **4)** $\cos\Big(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\Big)$, $k = 0, 1, 2, 3$. U sljedećim je odgovorima navedena samo prva vrijednost korijena: **6)** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; **7)** $1 + i$; **8)** $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; **9)** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; **10)** $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$.

16. **1)** $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_3 = -w_1$, $w_4 = -w_2$;
2) $-1 + i$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$;

3) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi + i\ \sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$,
$k = 0, 1, \dots, 5$.

17. **1)** $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi + i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right)$,
$k = 0, 1, \dots, 7$;
2) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi + i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$,
$k = 0, 1, \dots 5$;
3) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\left(\frac{6k+1}{36}\pi\right) + i\ \sin\left(\frac{6k+1}{36}\pi\right)\right)$,
$k = 0, 1, 2, \dots, 11$.

18. **1)** $w = \cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}_4$

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$w_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$w_4 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

2) $z = \cos\frac{3\pi+8k\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi+8k\pi}{12}$
$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$
$$z_1 = \cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}$$
$$z_2 = \cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}$$

19. $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$,
$w = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

20. $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi+12k\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi+12k\pi}{18}\right)$,
$k = 0, 1, 2$;
$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right);$$
$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{18} + i\sin\frac{19\pi}{18}\right);$$
$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{18} + i\sin\frac{31\pi}{18}\right);$$
$$w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3};$$
$$w^5 = 5\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

21. $\sqrt[4]{z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi+12k\pi}{24} + i\sin\frac{11\pi+12k\pi}{24}\right)$,
$k = 0, 1, 2, 3$
$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24} + i\sin\frac{11\pi}{24}\right)$$
$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24} + i\sin\frac{23\pi}{24}\right)$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{35\pi}{24} + i\sin\frac{35\pi}{24}\right)$$
$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{47\pi}{24} + i\sin\frac{47\pi}{24}\right);$$
$$\bar{z} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$
$$\bar{z}^3 = 64\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

22. $z^4 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;
$\bar{z} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$;
$$\sqrt[5]{\bar{z}} = \cos\frac{\pi+6k\pi}{15} + i\sin\frac{\pi+6k\pi}{15},$$
$k = 0, 1, 2, 3, 4$
$$\bar{z}_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$
$$\bar{z}_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$
$$\bar{z}_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$
$$\bar{z}_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$
$$\bar{z}_4 = sq2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

23. $z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\ \sin\frac{\pi}{8}$, $z_2 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\ \sin\frac{3\pi}{8}$,
$z_3 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\ \sin\frac{5\pi}{8}$, $z_4 = \cos\frac{7\pi}{8} + i\ \sin\frac{7\pi}{8}$.

25. **1)** $z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$,
$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
3) Rastavljanjem na faktore dobit će se
$$(z+1)(z^4+z^2+1) = 0.$$

Riješi zadatak do kraja.
4) i, $\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$, $\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$.

Rješenja 1.8

2. $a>\frac{5}{4}$.

3. $x_{2,3}=\pm i\sqrt{2}$.

4. Kvadriranjem $x_1^2=5+2\sqrt{6}$, pa je $(x_1^2-5)^2=24$, tj. $x_1^4-10x_1^2+1=0$. Dakle, $P(x)=x^4-10x^2+1$.

5. Jednadžba ima četiri rješenja. Uz $z_1=1+i$ ostala su tri $z_2=1-i$ te $z_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$.

6. $x_{1,2}=1\pm 2i$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$, $x_{5,6}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $x_{1,2}=\pm i$, $x_3=-3$, $x_4=1$.

8. Nakon dijeljenja brojnika i nazivnika sa $z^2+1=(z-i)(z+i)$, dobit će se razlomak $\frac{z^2-4z+3}{z^2-5z+4}$ koji se još može skratiti (sa $z-1$) te je konačno rezultat kraćenja razlomak $\frac{z-3}{z-4}$.

9. **1)** $z_1=2+3i$, $z_2=-2+i$; **2)** $z_1=i$, $z_2=1-i$.

12. **1)** Jednadžba se svodi na $z^3=-2+2i$, s rješenjima $z_0=1+i$, $z_1=-1{,}37+0{,}37i$, $z_2=0{,}37-1{,}37i$.
2) Dobivamo $z^2=-1/2\pm i\sqrt{3}/2$ i odavde $z_1=1/2+i\sqrt{3}/2$, $z_2=-1/2+i\sqrt{3}/2$, $z_3=-1/2-i\sqrt{3}/2$, $z_4=1/2-i\sqrt{3}/2$.
3) Jednadžba se svodi na $(z^3+i)^2=0$, s rješenjima (dvostrukim) $z_1=i$, $z_2=-\sqrt{3}/2-i/2$, $z_3=\sqrt{3}/2-i/2$. **4)** Jednadžba se svodi na $(z+1)^2=-2$, s rješenjima $z_1=-0{,}37+1{,}09i$, $z_2=-2{,}26$, $z_3=-0{,}37-1{,}09i$. **5)** $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-\sqrt{3}/2-i/2$, $z_4=\sqrt{3}/2-i/2$.

13. **1)** $z=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})$.
2) $z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$, $z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{16\pi}{9}+i\sin\frac{16\pi}{9}\right)$;
3) $z_1=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_2=32\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$, $z_3=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;
4) $z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $z_2=2\cos\pi+i\sin\pi$, $z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$;
5) $z_1=1+\sqrt{3}i$, $z_2=-\sqrt{3}+i$, $z_3=-1-\sqrt{3}i$, $z_4=\sqrt{3}-i$; **6)** $z_1=\sqrt[3]{2\sqrt{6}}\left(\cos\frac{43\pi}{36}+i\sin\frac{43\pi}{36}\right)$, $z_2=\sqrt[3]{2\sqrt{6}}\left(\cos\frac{47\pi}{36}+i\sin\frac{47\pi}{36}\right)$.

14. Uvrštavanjem vrijednosti dobiva se sustav s rješenjima $a=-i$, $b=-5+12i$, $c=12+5i$. Jedna nul-točka polinoma je $z_1=i$, druge dvije su rješenja jednadžbe $z^2-5+12i=0$, $z_2=2+3i$, $z_3=-2-3i$.

15. Broj 1 nul-točka je polinoma P pa je on djeljiv s $z-1$. Grupiranjem njegovih članova dobivamo prikaz $P(z)=(z-1)(8z^3+27)$. Jedno rješenje jednadžbe je $P(z)=0$ je $z_1=1$. Preostala tri rješenja su treći korijeni broja $-\frac{27}{8}$.

2. Kombinatorika

Rješenja 2.1

1. $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

2. 48. 12 brojeva imaju u zapisu dvije jedinice, 12 dvije dvojke, a 24 imaju sve tri znamenke različite.

3. 73.

4. $2 \cdot 4! = 48$.

5. $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$.

6. Na sedam načina.

7. Na 11 načina.

8. Na 15 načina.

9. Izbor dvaju podskupova odgovara odabiru jedne faktorizacije broja. Ne smijemo odabrati prazan podskup, odnosno sve faktore. Zato je ukupan broj različitih umnožaka jednak $\frac{1}{2}(2^n - 2)$.

10. 512 slika. Svaka odgovara nekom podskupu skupa od 9 čunjeva.

11. Na 255 načina. Broj odgovara broju podskupova skupa od 8 elemenata, umanjenom za prazni skup.

12. **1)** Na $2^6 - 1 = 63$ načina. **2)** Na $6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ način.

13. 511.

14. $24 \cdot 24 = 576$.

15. Na $32 \cdot 32 = 1024$ načina.

16. $32 \cdot 24 = 768$.

17. Na $17 \cdot 15 = 255$ načina.

18. $18 \cdot 17$.

19. 2^{20}

20. $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

21. 10^6.

22. **1)** $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$; **2)** $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$.

23. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18\,000$; $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 25 = 22\,500$ (dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 4 ima 25).

24. Kako je u abecedi 30 slova, moguće je načiniti $30^2 = 900$ različitih inicijala. No, $2 \cdot 900 = 1800 < 2000$.

25. Na $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ načina.

26. $34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot \ldots \cdot 5$.

27. $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4$.

28. $m \cdot n \cdot k$.

29. $17 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

30. **1)** $4 \cdot 10^5$; **2)** $9 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$.

31. **1)** $8 \cdot 9^4$. **2)** $9^4 + 4 \cdot 8 \cdot 9^3$. **3)** $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4$.

32. Na $28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25$ načina.

33. Na 20 160 načina.

34. **1)** $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; **2)** $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

35. $C_{10}^4 \cdot C_6^4 \cdot 4!$.

36. **1)** $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$; **2)** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6480$; **3)** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 3240$; **4)** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 2160$; **5)** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 180$.

37. 96.

38. $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$.

39. $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$.

40. $45 \cdot 10^5$

41. Kocka ima 4, oktaedar 3, dodekaedar 100 a ikosaedar 36 prostornih dijagonala.
Odredi s koliko je vrhova povezan dijagonalom svaki od vrhova tijela.

42. **1)** $3^{13} = 1\,594\,323$. **2)** $1^6 \cdot 2^3 \cdot 3^4 = 648$.

Rješenja 2.2

1. 7.

2. $12!$

3. $32!$.

4. 24, ako mjesto za stolom nije važno; 120 ako jest.

5. $2 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4! + 5! = 264$.

7. $8! = 40\,320$.

8. $8!$ u oba slučaja.

9. $2 \cdot 5! \cdot 5!$.

10. $4! \cdot 3!$.

11. $4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!$.

12. **1)** Na $12!$ načina. **2)** Na $4!$ načina. Komplete treba promatrati kao jedinstvenu knjigu.

13. Na $2 \cdot 6! \cdot 6!$ načina.

14. **1)** $4! = 24$; **2)** $3 \cdot 4! = 72$; **3)** $5! - 3! = 114$.

15. **1)** $5!$; **2)** $6 \cdot 4!$; **3)** $3 \cdot 5!$; **4)** $4!$.

16. **1)** 2; **2)** 12.

17. $5! - 2 \cdot 4!$.

18. $6\,666\,600$.

19. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3! = 4320$.

20. $\dfrac{28!}{(7!)^4}$.

21. $\dfrac{30!}{(10!)^3}$.

22. $5! \cdot 6!$.

23. **1)** $7!$; **2)** $6!$.

24. **1)** $5! - 4! = 96$, **2)** $5! - 3! = 114$, **3)** $5! - 2! = 118$, **4)** $4! = 24$ **5)** 72.

25. **1)** $6!$; **2)** $3! \cdot 6!$.

27. $2 \cdot 4!$

28. 45213, 32415, 51423, 32514, 42351.

29. 524136, 546213.

30. 162453

31. 585., 664., 87., 618.

32. KRILO, ROMAN, RUDNIK

33. **1)** treća; **2)** 258.; **3)** 582.; **4)** 634.

34. **1)** 22. **2)** 13. **3)** 179. **4)** 17.

36. Na $4.446 \cdot 10^{13}$ načina.

37. **1)** $\dfrac{11!}{5!2!2!}$; **2)** $\dfrac{10!}{2!3!2!}$; **3)** $\dfrac{11!}{4!4!2!}$; **4)** $\dfrac{9!}{2!3!}$.

41. 560, 420, 280.

43. $n = 6$.

44. $n = 8$.

Rješenja 2.3

1. 56, 21.

2. **1)** $\binom{10}{3}$; **2)** $\binom{6}{3} + \binom{4}{3}$; **3)** $\binom{10}{3} - \binom{6}{3}$.

3. 16, 24, 8, 28.

4. $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

5. Prvi izbor na $\binom{12}{3}$ načina, a drugi na $12 \cdot 11 \cdot 10$ načina.

6. Iz jednadžbe $\binom{n}{2} = 45$ dobiva se $n = 10$.

7. $\binom{13}{2} - 13 = 65$.

8. $\binom{6}{2} = 15$.

9. $\binom{5}{2} = 10$.

10. $\binom{n}{2}$. Svaka dva pravca imaju jednu presječnu točku.

11. $\binom{9}{2} - \binom{2}{2} = 35$.

12. $\binom{18}{2} - \binom{5}{2} - [\binom{6}{2} - 1] - [\binom{4}{2} - 1] = 124$.

13. $C_{11}^3 - C_5^3 + 1 = 156$.

14. $m \cdot C_n^2 + n \cdot C_m^2$. Imamo trokute dvaju tipova. Prve, kojima su dva vrha na jednom pravcu, a jedan na drugom i obrnuto.

15. $C_n^2 - C_k^2$.

16. Za svaki presjek trebamo 4 vrha, dakle $\binom{n}{4}$.

17. $\binom{28}{25} 25! = \frac{28!}{3!}$

18. $C_7^2 \cdot 2^5 = 672$.

19. Na 756 načina.

20. $30 \cdot C_{29}^4$.

21. $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2}$.

22. $C_8^5 \cdot C_{10}^2$.

23. $C_9^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = 2520$.

24. $278\,256$.

25. Na $C_{52}^{13} = 635\,013\,559\,600$ načina.

26. $C_{32}^{8} \cdot C_{24}^{8} \cdot C_{16}^{8} \cdot C_{8}^{8} = 99\,561\,092\,450\,391\,000$.

27. $\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13}$.

28. Na $C_{13}^{2} \cdot C_{13}^{4} \cdot C_{13}^{3} \cdot C_{13}^{4} = 11\,404\,407\,300$ načina.

29. 11 dana, 66 partija, 58 partija.

30. Tri kata na kojima će osobe izići možemo odabrati na $\binom{11}{3}$ načina. Dvije osobe koje će prve izići možemo odabrati na $\binom{9}{2}$ načina, sljedeće tri na $\binom{7}{3}$ načina. Rješenje: $\binom{11}{3}\binom{9}{2}\binom{7}{3}$.

31. $C_{12}^{3} \cdot C_{9}^{4} = 27\,720$.

32. Na 22680 načina.

33. $\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7}$.

34. S jedne strane pločice može se nalaziti od 0 do 9 točkica. $\overline{C}_{10}^{2} = 55$.

35. $C_{4+3-1}^{3} = C_{6}^{3} = 20$.

36. 175.

37. C_{m+n}^{m}.

38. 2^4, $15 \cdot 16^4$.

39. Svih je brojeva 3^8. Znamenku 3 možemo na tri mjesta rasporediti na $\binom{8}{3}$ načina, dvije znamenke na preostalih 5 mjesta na 2^5 načina: $\binom{8}{3} \cdot 2^5$.

40. **1)** $x = 8$; **2)** $k = 7$; **3)** $n = 4$.

41. **1)** $x_1 = 3$, $x_2 = 14$; **2)** $x = 3$; **3)** $n = 10$.

42. **1)** $x \in \{0, 1, 2\}$; **2)** $n \in \{0, 1, 2, \dots, 27\}$.

43. Broj iznosi $(n + k)^2$.

3. Vjerojatnost

Rješenja 3.1

1. $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,3,5\}$ itd.

4. Ω = PP, GG, PGG, GPP, PGPP, GPGG, PGPGG, PGPGP, GPGPP, GPGPG, $A = \{$GPP,PGG$\}$, $B = \{$PP,GG,PGG,GPP$\}$ itd.

5. 11, to su brojevi od 2 do 12.

6. $A = \{cbb, cbc, ccb\}$ itd.

7. $\Omega = \{bb, bc, cb, cc\}$.

8. $\Omega = \{bb, bc, cb\}$.

9. $2^5 = 32$, 6.

10. Događaj A ima devet elementarnih, B četiri a C osam.

11. **1)** Postoji devet elementarnih događaja. Prikažimo ih sljedećom tablicom

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
I	*bc*	–	–	*b*	*b*	–	–	*c*	*c*
II	–	*bc*	–	*c*	–	*b*	*c*	*b*	–
III	–	–	*bc*	–	*c*	*c*	*b*	–	*b*

2) $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_9\}$, $B = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_9\}$, $C = \{\omega_2, \omega_3\}$.

12. **1)** Postoji osam elementarnih događaja:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
I	*xyz*	*xy*	*xz*	*yz*	*x*	*y*	*z*	–
II	–	*z*	*y*	*x*	*yz*	*xz*	*xy*	*xyz*

2) $A = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7\}$; $B = \{\omega_2, \omega_5\, \omega_6, \omega_8\}$; $A \cup B = \{\omega_2, \omega_5\, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$; $AB = \{\omega_5\, \omega_6\}$.

Rješenja 3.2

2. Niti jedna.

3. $P(\{a\}) = \frac{2}{9}$, $P(\{b\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{c\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{d\}) = \frac{1}{9}$.

4. 0.3

5. 0.3

6. $p = \frac{1}{2}$.

7. $p = \dfrac{4}{15}$.

8. $N = n!$, $M = (n-1)!$, $p = \dfrac{1}{n}$.

9. $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{2}$. Prebroji povoljne u skupu 36 mogućih događaja.

10. **1)** $\dfrac{1}{4}$; **2)** $\dfrac{1}{2}$; **3)** $\dfrac{1}{2}$.

11. $p = \dfrac{\binom{95}{3}}{\binom{100}{3}} = 0.856$.

12. U svim je slučajevima $N = \binom{10}{2} = 45$.

1) $M = \binom{6}{2} = 15$;

2) $M = \binom{6}{1}\binom{4}{1} = 24$; **3)** $M = \binom{4}{2} = 6$.

13. Vrijedi $N = \binom{10}{2} = 45$. Tri su moguće kombinacije boja: dvije bijele, jedna bijela i jedna crna, dvije crne. Broj povoljnih ishoda je: $M_1 = \binom{7}{2} = 21$, $M_2 = 7 \cdot 3 = 21$, $M_3 = \binom{3}{2} = 3$. Prve su dvije mogućnosti jednako vjerojatne.

14. $\dfrac{6 \cdot 5}{12 \cdot 11}$.

15. $N = \binom{52}{2}$, **1)** $M = \binom{13}{2}$, **2)** $M = 13 \cdot 13$, **3)** $M = \binom{4}{2}$, **4)** $M = 4 \cdot 4$.

16. $\dfrac{\binom{98}{96}\binom{2}{2}}{\binom{100}{98}} = 0.96$.

19. **1)** $p = \dfrac{6}{11}$; **2)** $p = \dfrac{1}{11}$.

20. $\dfrac{5}{9}$; $\dfrac{5}{9}$; $\dfrac{1}{2}$.

21. $p = \dfrac{4!}{6^4}$.

22. Treću, posljednju znamenku može birati na 5 načina, drugu na 9, a prvu na 8 načina. $p = \frac{1}{360}$.

23. $N = \binom{45}{6}$, $M_6 = 1$, $M_5 = \binom{6}{5}\binom{39}{1}$, $M_4 = \binom{6}{4}\binom{39}{2}$, $M_3 = \binom{6}{3}\binom{39}{3}$.

24. $N = \binom{10}{6}$; $M = \binom{5}{3}\binom{4}{3}$.

25. $N = \binom{52}{13}$; $M = \binom{13}{5}\binom{13}{3}\binom{13}{2}\binom{13}{3}$.

26. $\frac{1}{216}$.

27. Smatramo (pri konstrukciji vjerojatnosnog prostora) da su sva slova različita! Četiri slova možemo odabrati na $N = V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ načina. Povoljni načini su $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ jer na prvo mjesto može doći bilo koje od dvaju slova M, na drugo neko od triju slova A itd. Zato je $p_1 = \frac{1}{420}$.

28. $p = \frac{1}{60}$.

29. Mogućih je ishoda $N = \frac{12!}{2!2!2!2!}$, a povoljan je samo jedan.

30. **1)** $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{9 \cdot 10^4}$; **2)** $\frac{4 \cdot 5^4}{9 \cdot 10^4}$; **3)** $\frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cdot 1}{9 \cdot 10^4}$.

31. $p = \frac{V_{365}^{36}}{365^{36}} = 0.168$.

32. $p = \frac{50}{3003}$.

34. **1)** $A\overline{B}\,\overline{C}$; **2)** $AB\overline{C}$; **3)** ABC; **4)** $A \cup B \cup C$; **5)** $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$; **6)** $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

35. $P(\overline{A}) = 0.4$, $P(\overline{B}) = 0.6$, $P(AB) = 0.2$, $P(\overline{A}B) = 0.2$, $P(A\overline{B}) = 0.4$.

36. $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$, $P(A\overline{B}) = 0.2$.

37. $\frac{11}{36}$.

38. Postoji 36 mogućih događaja.
1) $\frac{5}{36}$, **2)** $\frac{1}{9}$, **3)** $\frac{1}{6}$, **4)** $\frac{8}{9}$.

39. **1)** $\frac{1}{4}$; **2)** $\frac{1}{2}$; **3)** $\frac{15}{16}$; **4)** $\frac{11}{16}$.

Rješenja 3.3

1. Dio intervala koji odgovara ovom događaju ima duljinu $\frac{3}{10}$.

2. $\frac{3}{10}$. Izdvoji dio intervala koji odgovara ovom događaju. To je unija deset intervala duljine $\frac{3}{100}$. (Ista se vjerojatnost dobije za bilo koju znamenku po redu u decimalnom prikazu broja!)

3. $p = \frac{1}{8}$. Izbor dvaju brojeva odgovara izboru jedne točke unutar jediničnog kvadrata $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1$. Povoljan je skup za koji je $x + y > \frac{3}{2}$, a taj leži iznad pravca $y = \frac{3}{2} - x$. Površina je tog skupa $\frac{1}{8}$.

4. **1)** $\frac{7}{8}$, **2)** $\frac{1}{4}$, **3)** $\frac{7}{8}$.

5. **1)** Označi s x duljinu $|AM|$, a s y duljinu $|AN|$. Događaj je ekvivalentan s $x < y$, vjerojatnost je $\frac{1}{2}$.
2) Vjerojatnost da je M bliža rubu A je $\frac{1}{2}$, isto za točku B. Događaji su nezavisni, pa je rezultat $\frac{1}{4}$. 3) $\frac{1}{4}$.

6. $P = \frac{5}{9}$.

7. $\frac{139}{1152}$.

9. Površina je trokuta $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a kruga upisanog u taj trokut $\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\pi$. $p = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

10. $p = \frac{1}{2}$. Površina trokuta je $\frac{1}{2}a^2$, a upisanog kvadrata $\frac{1}{4}a^2$.

11. $\frac{1}{4}$. Kuglica neće dodirnuti niti ako joj središte prođe kroz zamišljeni kvadrat stranice 5 mm (koji dobijemo ako iz kvadratića mrežice oduzmemo rub širok 2.5 mm).

12. $1 - \frac{\pi}{4}$.

13. 0.5915.

14. $p=\frac{2}{3}$. Neka je A jedna od odabranih točaka na kružnici. Da bi se ostvario događaj, druga točka B mora pasti unutar luka duljine $\frac{2}{3}\cdot 2r\pi$. Nacrtaj sliku.

15. $p=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Rješenja 3.4

1. Rezultati na pojedinim kockama nezavisni su događaji. **1)** $\frac{1}{36}$; **2)** $\frac{1}{18}$.

2. **1)** $\frac{1}{4}$; **2)** $\frac{1}{2}$; **3)** $\frac{1}{6}$; **4)** $\frac{1}{6}$; **5)** $\frac{1}{15}$; **6)** $\frac{1}{6}$; **7)** $\frac{10}{11}$.

3. U skupu od 15 mogućih ishoda, 5 je povoljnih. $\frac{1}{3}$.

4. U skupu od 30 mogućih ishoda, 8 je povoljnih. $\frac{4}{15}$.

5. $\frac{1}{3}$

6. $p=\frac{1}{2^{10}}/\frac{1}{2^9}=\frac{1}{2}$. Rezultat desetog bacanja ne ovisi o rezultatima prvih devet bacanja.

7. $\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}$.

8. $P(A)=\frac{1}{12}$; $P(B)=\frac{7}{12}$; $P(C)=\frac{1}{3}$.

9. **1)** $\frac{1}{3}$. Odredi sve elementarne događaje koji pripadaju događaju C (ima ih 18) i izdvoji one koji zadovoljavaju događaj B. **2)** Izračunaj $P(A)$, $P(B)$ i $P(AB)$. Događaji su zavisni.

10. $P(A)=\frac{11}{36}$, (računaj vjerojatnost komplementa). $P(B)=\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$. Vrijedi: $AB=\{$pojavila se jedna jedinica i još jedan broj različit od $1\}$, $P(AB)=\frac{10}{36}$. Zato je $P(A|B)=P(AB)/P(B)=\frac{1}{3}\neq P(A)$. Događaji su zavisni.

11. Računamo vjerojatnost komplementa: nije se ostvario nijedan događaj. Vjerojatnosti neostvarivanja pojedinih događaja su $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, pa komplement ima vjerojatnost $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$. Traženi događaj ima vjerojatnost $\frac{14}{15}$.

12. $\frac{3}{10}$.

13. **1)** $p=\frac{2\cdot 3}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{5}$; **2)** $p=\frac{3}{4}$; **3)** $p=\frac{6}{7}$.
Ovdje je riječ o uvjetnoj vjerojatnosti. Mogući su ishodi kod kojih je barem jedna kuglica bijela, a takvih ima 7. Povoljni su oni kad je izvučena jedna bijela i jedna crvena, a takvih je 6.

14. $p=\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

15. Neka je A_i događaj: i-ti strijelac je pogodio metu. Ti su događaji nezavisni. Tražimo vjerojatnost događaja A: ostvario se točno jedan od A_1, A_2, A_3:

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=0.8\cdot0.4\cdot0.5+0.2\cdot0.6\cdot0.5+0.2\cdot0.4\cdot0.5\\&=0.26.\end{aligned}$$

16. 0.32. Vidi prethodni zadatak.

17. Označi $A=\{$meta je pogođena$\}$, $B=\{$prvi strijelac je pogodio$\}$, $C=\{$drugi strijelac je pogodio$\}$, $D=\{$meta je pogođena jednim metkom$\}$. Onda je $A=B\cup C$ pa je $\overline{A}=\overline{B}\cdot\overline{C}$ i zato $1-P(A)=(1-P(B))(1-P(C))=0.6\cdot0.2=0.12$. Dakle, $P(A)=0.88$. Za D vrijedi $D=B\overline{C}\cup\overline{B}C$ i ovi su događaji disjunktni. B i C su nezavisni pa vrijedi $P(D)=P(B)(1-P(C))+(1-P(B))P(C)=0.4\cdot0.2+0.8\cdot0.6=0.56$. Traži se $P(C\mid D)=\frac{P(DC)}{P(D)}=\frac{P(\overline{B}C)}{P(D)}=\frac{0.6\cdot0.8}{0.56}=0.857$.

18. Neka je D događaj: meta je pogođena jednim metkom, te $A=\{$metu je pogodio Andro$\}$, slično za B i C. Događaji A, B i C su nezavisni, a D je zbroj disjunktnih događaja: $D=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$. Zato je $P(D)=0.6\cdot0.3\cdot0.2+0.4\cdot0.7\cdot0.2+0.4\cdot0.3\cdot0.8=0.188$. Tražimo $P(A|D)$:

$$P(A|D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(A\overline{B}\,\overline{C})}{P(D)}=\frac{0.6\cdot0.3\cdot0.2}{0.188}=0.19.$$

19. $\frac{4}{21}$. Ispiši sve kombinacije sa zbrojem 13.

20. **1)** Računamo preko vjerojatnosti komplementa: $p=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$.
2) $p=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$.

21. Vjerojatnosni je prostor beskonačan. Ako je $\omega_n = \{$ meta je pogođena u n-tom pokušaju $\}$, onda su vjerojatnosti ovih događaja: $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.4 \cdot 0.6$, $p_3 = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.6$, općenito $p_n = P(\omega_n) = 0.4^{n-1} \cdot 0.6$. Zato je
1) $p_3 = 0.4^2 \cdot 0.6$;
2) $p_1 + p_2 + p_3 = 0.936$;
3) $p_5 + p_6 + p_7 + \ldots = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = 0.0256$. Primijetimo da se događaj može interpretirati ovako: meta je promašena u prva četiri pokušaja (zašto?), pa je $p = 0.4^4 = 0.0256$.

22. Vidi prošli zadatak. **1)** $\dfrac{7}{8}$; **2)** $\dfrac{1}{2^{50}}$.

23. $P(A) = \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{5}{216}$, $P(B) = \frac{1}{6^5} + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6^4}$ (pronađi elementarne događaje koji odgovaraju događaju B)

24. **1)** $\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{6}$; **2)** $\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{6}$; **3)** $\left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \cdot \dfrac{1}{6}$.

25. Povoljni su ishodi PP, GG, GPP, PGG, PGPP, GPGG, GPGPP, PGPGG. To su međusobno disjunktni događaji, jer se pokus prekida čim se ostvari jedan od njih. Vjerojatnost njihove unije je $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{15}{16}$. Primijetimo da je mnogo lakše izračunati suprotnu vjerojatnost. Pokus se neće završiti u prvih 5 bacanja, ako se ostvari niz PGPGP ili GPGPG. Njihova je vjerojatnost $\frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$.

26. $P(A) = \dfrac{1}{8}$, $P(B) = \dfrac{3}{8}$.

27. $p = \frac{11}{32}$.

28. **1)** $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64}$.
2) $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{30}{64}$.

29. 0.68.

31. Vjerojatnost da se to dogodi u jednom pokušaju je $\dfrac{1}{36}$. Tražena je vjerojatnost jednaka $p_4 = \binom{6}{4}\left(\dfrac{1}{36}\right)^4\left(\dfrac{35}{36}\right)^2 = 8.44 \cdot 10^{-6}$.

32. **1)** $0.8^5 = 0.32768$; **2)** $5 \cdot 0.8^4 \cdot 0.2 = 0.4096$; **3)** $0.2 \cdot 0.8^4 = 0.08192$; **4)** $\binom{5}{3}0.8^3 \cdot 0.2^2 + \binom{5}{4}0.8^4 \cdot 0.2 + \binom{5}{5}0.8^5 = 0.94208$.

33. Neka je A_i događaj: pogodio je i-ti strijelac. Događaj A "meta je pogođena" jednak je $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Iz $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ slijedi $P(A) = 0.952$.
Za $B = \{$ je pogođena s točno dva metka $\}$ vrijedi $B = A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3$ pa je $P(B) = 0.464$. Vjerojatnost da je promašio treći strijelac je $P(\overline{A}_3|B) = \dfrac{P(\overline{A}_3B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1A_2\overline{A}_3)}{P(B)} = 0.103$.

Rješenja 3.5

1. $\frac{17}{40}$.

2. Označimo s A traženi događaj, a s H_1 hipotezu: prvi je broj neparan; $P(H_1) = \dfrac{3}{5}$, $P(A \mid H_1) = \dfrac{2}{4}$. Za hipotezu H_2: prvi broj je paran vrijedi $P(H_2) = \dfrac{2}{5}$, $P(A \mid H_1) = \dfrac{1}{4}$. Po formuli potpune vjerojatnosti je $P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{5}$.
Primijeti da je vjerojatnost ista onoj da prvi broj bude paran.

3. $P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \dfrac{4}{10} \cdot 0.9 + \dfrac{6}{10} \cdot 0.7 = 0.78$.

4. $P = \dfrac{11}{18}$.

5. Tri su moguće hipoteze, ovisno o broju prebačenih bijelih kuglica. $\dfrac{9}{35}$.

6. Neka je A traženi događaj. Postavi dvije hipoteze: $H_i = \{$ otkrivena karta potječe iz i-tog snopa $\}$, $i = 1, 2$. Vrijedi $P(H_1) = \dfrac{1}{2}$, $P(H_2) = \dfrac{1}{2}$, $P(A|H_1) = \dfrac{4}{52}$, $P(A|H_2) = \dfrac{4}{52}$.
Odatle rezultat $P(A) = \dfrac{1}{13}$ — baš kao da se vuče samo jedna karta iz jednog snopa.

7. Neka je A traženi događaj. Postavi dvije hipoteze: $H_i = \{$ otkrivena karta potječe iz i-tog snopa $\}$, $i = 1, 2$. Vrijedi $P(H_1) = \dfrac{1}{3}$, $P(H_2) = \dfrac{2}{3}$, $P(A|H_1) = \dfrac{4}{52}$, $P(A|H_2) = \dfrac{4}{52}$.
Opet je $P(A) = \dfrac{1}{13}$.

8. 0.389.

9. $P = \frac{1}{3}$.

10. $\frac{1}{4}$.

11. Dvije su moguće hipoteze:

$$H_1 = \{\text{izvukli smo neispravnu kockicu}\},$$

$$H_2 = \{\text{izvukli smo ispravnu kockicu}\}.$$

Njihove su apriorne vjerojatnosti $P(H_1) = \frac{1}{1000}$, $P(H_2) = \frac{999}{1000}$. Uvjetne vjerojatnosti opisanog događaja A su $P(A \mid H_1) = 1$ i $P(A \mid H_2) = \frac{1}{6^4}$. Zato je $P(A) = \frac{17}{9600}$. Po Bayesovoj formuli dobivamo $P(H_1 \mid A) = \frac{48}{85}$.

12. Neka je $A = \{\text{izvučena je bijela kuglica}\}$, $H_i = \{\text{kuglica je izvučena iz } i\text{-te pregrade}\}$. Onda je $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{18}$. Po Bayesovoj formuli je $P(H_3 \mid A) = \frac{5}{11}$.

13. $\frac{5}{32}$.

14. $\frac{17}{53}$

15. Apriorna vjerojatnost te hipoteze je $P(H_1) = \frac{1}{4}$, a njoj suprotne $P(H_2) = \frac{3}{4}$. Uvjetne vjerojatnosti opisanog događaja su $P(A \mid H_1) = \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50}$, $P(A \mid H_2) = \frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50}$. Zato je $P(A) = \frac{1}{17}$, a $P(H_1 \mid A) = \frac{11}{50}$.

4. Nizovi

Rješenja 4.1

3. **1)** 1, 1, 1, 2, 2,...; **2)** 1, 2, 3, 4, 5,...; **3)** $a_n = -n$ i imamo niz -1, -2, -3, -4, -5,...; **4)** 0, 1, 1, 2, 2,...; **5)** 0, 0, 0, 0, 0,...; **6)** $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$,....

4. **1)** 1, 3, 6, 10, 15,...; **2)** 2, 8, 20, 40, 70,...; **3)** $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$,...; **4)** $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{23}{12}$, $\frac{163}{60}$, $\frac{71}{20}$,....

8. **1)** 70; **2)** -4; **3)** $\dfrac{1\,237}{6!}$.

9. **1)** 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5,...; **2)** 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2,....

11. **1)** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; **2)** $a_n = 2^{n-1} + 1$; **3)** $a_n = n(n+1)$; **4)** $a_n = (-1)^{n-1}$; **5)** $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$; **6)** $a_n = n^3 + 1$; **7)** $a_n = \dfrac{2n}{2n-1}$; **8)** $a_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

12. $a_6 \cdot a_{12} \cdot a_{18} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{18} = 36$.

13. $\frac{13}{60}$.

14. $0 - 4 - 26 - 120 - 502 = -652$.

15. $0 - 4 - 26 - 120 - 502 = -652$.

16. $S_{100} = -50$, dakle je aritmetička sredina jednaka -0.5.

19. **1)** 1, 1, 0, -3, -10,...; **3)** 1, 1, 2, 4, 8,...; **5)** 1, 1, 2, 3, 5,...;

20. $(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4) \cdot \ldots \cdot (a_{99} \cdot a_{100}) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 100 = 2^{50} \cdot 50!$.

21. Prema uvjetima ispisujemo niz: $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, $2, 3, \ldots$ Uočit ćemo da se u ovom nizu uzastopce ponavlja šest brojeva. Kako je $1000 = 166 \cdot 6 + 4$, onda je $a_{1\,000} = \frac{1}{2}$.

22. Rješenje je analogno rješenju prethodnog zadatka; $a_{777} = 2$.

23. Provedi provjeru izravno – uvrštavanjem.

24. Iz sustava $a_{n+1} = 7n + 10$, $a_n = 7n + 3$ dobiva se $a_{n+1} = a_n + 7$. Zbog toga imamo zapis $a_1 = 10$, $a_{n+1} = a_n + 7$.

25. $a_1 = \frac{5}{2}$. Iz $a_{n+1} = 5 \cdot 2^{-n-1}$ i $a_n = 5 \cdot 2^{-n}$ dijeljenjem će se dobiti $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$. Dakle, $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

26. Imamo niz: $a, b, b-a, -a, -b, a-b, a, b, \ldots$. Redom se u nizu ponavlja skupina od 6 brojeva čiji je zbroj jenak nuli. Dakle je $S_{66} = 0$.

27. Ispisujemo redom članove niza: k, $-\dfrac{1}{k+1}$, $-\dfrac{k+1}{k}$, k, $-\dfrac{1}{k+1}$,.... Uočavamo da dolazi do periodičkog ponavljanja članova niza te su svi članovi kojima je indeks broj oblika $3m-2$, $m \in \mathbf{N}$ jednaki k.

28. $-3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2$,

29. Provjera se provodi matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja je ispunjena. Uzmimo da je za $n = k$, $k \geqslant 1$, $a_k = 3k + 2$. Onda je $a_{k+1} = a_k + 3 = 3k + 2 + 3 = 3(k+1) + 2$.

30. Dokazuje se matematičkom indukcijom.

31. Za $n = 1$ tvrdnja je točna. Pretpostavimo da je točna za $n = k$, tj. da je $a_k = 2^{k+1} - 3$. Onda imamo $a_{k+1} = 2a_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$.

33. Provjerava se indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Onda imamo $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n+1}{(n+1)+1}$.

36. Pokazuje se indukcijom.

Rješenja 4.2

3. $a_{19} = -3$.

4. $a_{47} = \frac{1}{15}$.

7. 659 604.

12. Niz je aritmetički ako i samo ako je razlika dvaju njegovih uzastopnih članova konstantna: $a_{n+1} - a_n = d$. U primjeru **1)** je $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 7 - (2n-7) = 2$.

13. Da, broj 132 je 26. član tog aritmetičkog niza. Isto tako, broj 181 član je niza $1, 4, \ldots$, i to 61. po redu.

14. 87.5 metara.

15. Označimo s a_n dubinu na kojoj temperatura iznosi $n°C$. Tada je (a_n) aritmetički niz za koji je $a_9 = 25$ m i razlika $d = 33$ m. Traži se a_{70}. Vrijedi $a_{70} = a_1 + 69d = a_1 + 8d + 61d = a_9 + 61d = 25\text{m} + 61 \cdot 33\text{m} = 2038\,\text{m}$.

16. **1)** 28; **2)** 28; **3)** 7; **4)** 34; **5)** $\frac{3}{2}$.

17. **1)** $a_1 = 12$, $d = 3$; **2)** $a_1 = 9.7$, $d = -1.4$; **3)** $a_1 = -2$, $d = 7$;
4) $a_1 = -5$, $d = 3$ ili $a_1 = 8$, $d = -\frac{7}{2}$;
5) $a_1 = 1$, $d = 3$ ili $a_1 = -40\frac{2}{3}$, $d = 19\frac{2}{3}$;
6) $a_1 = -7$, $d = 3$ ili $a_1 = 13\frac{2}{5}$, $d = -3\frac{4}{5}$.

18. Iz $x^2 - 10x + 9 = 0$ slijedi $x = 1$ ili $x = 9$.

19. Iz $x^2 - 8x = 0$ slijedi $x = 0$ ili $x = 8$.

20. Niz je aritmetički ako i samo ako vrijedi $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$ tj. $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, za svako n. Brojeve iz zadatka zapišemo kao $\log_2 3$, $\log_2 6$, $\log_2 12$ te je očito $\log_2 3 + \log_2 12 = \log_2 36 = 2\log_2 6$.

21. Iz $2\log(2^x - 1) = \log 2 + \log(2^x + 3)$ slijedi $x = \log_2 5$.

22. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ ili $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

23. Iz $2x = 1 + y$ i $x^2 - 2 = 2y$ dobivamo $x = 0$, $y = -1$ ili $x = 4$, $y = 7$.

24. Iz $3a_3 + 6a_{12} = 81$ slijedi $9(a_1 + 72d = 81$ pa je $a_9 = 9$.

25. $a_{10} = 11$.

26. Prema uvjetima zadatka jest $(x-d)+x+(x+d) = 33$, $x(x^2 - d^2) = 1287$. Imamo dva rješenja: 9, 11, 13 ili 13, 11, 9.

27. Iz $(x-d)+x+(x+d) = 27$ dobiva se $x = 9$. Zatim iz jednadžbe $(x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 = 275$ imamo $d^2 = 16$. Dva su rješenja: niz 5, 9, 13,... i niz 13, 9, 5,... .

28. Niz od četiriju članova možemo zapisati kao $x - 3d$, $x - d$, $x + d$, $x + 3d$ (razlika niza označena je s $2d$!). Zbroj im je 20, što daje $x = 5$. Dalje, iz drugog uvjeta imamo jednadžbu

$$\frac{1}{5-3d} + \frac{1}{5-d} + \frac{1}{5+d} + \frac{1}{5+3d} = \frac{25}{24},$$

odnosno nakon sređivanja: $9d^4 - 154d^2 + 145 = 0$. Odatle $d^2 = 1$ ili $d^2 = \frac{145}{9}$. Zadatak ima četiri rješenja: 2, 4, 6, 8 ili 8, 6, 4, 2 ili $5 - \sqrt{145}$, $5 - \frac{\sqrt{145}}{3}$, $5 + \frac{\sqrt{145}}{3}$, $5 + \sqrt{145}$ ili obrnuto.

29. To su brojevi 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, ili obrnuto 0.4, 0.3, 0.2, 0.1.

30. 9, 11, 13, 15.

31. Neka su to članovi niza $x - 3d$, $x - d$, $x + d$, $x + 3d$. Onda je $(x-3d)(x-d)(x+d)(x+3d) + 16d^4 = x^4 - 10x^2d^2 + 25d^4 = (x^2 - 5d^2)^2$.

32. $n = 6$.

33. U zadanom su nizu dva aritmetička podniza: 5, 11, 17,... s općim članom $a_k = 6k - 1$, te 7, 13, 19,... s općim članom $a_k = 6k + 1$.
Uvrštavanjem se na neparnim mjestima naizmjenično pojavljuju članovi prvog, a na parnim mjestima članovi drugog niza. Zapišimo:

$$6k-1 = 3(2k-1)+2 = 3n+2 = 3n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2};$$

$$6k+1 = 3 \cdot 2k + 1 = 3n + 1 = 3n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.$$

Tako je opći član $a_n = 3n + \frac{3}{2} - \frac{(-1)^n}{2}$.

34. $a_7 + a_{15} = 2a_{11} = 18$. Dakle je $a_{11} = 9$.

35. Iz $a_2 + a_{10} = 2a_6 = 12$ slijedi $a_6 = 2$. Dalje je $a_4 + a_6 + a_8 = 3a_6 = 6$.

36. $a_1 + a_2 + \ldots a_{17} = 17a_9 = 17 \cdot 35 = 595$.

37. **1)** $n = 11$, $S_n = 319$; **2)** $d = 7$, $S_n = 567$; **3)** $n = 20$, $d = 5$; **4)** $a_n = 55$, $S_n = 531$; **5)** $n = 15$, $a_n = -16$ ili $n = 6$, $a_n = 20$; **6)** $d = -3$, $a_n = -30$; **7)** $a_1 = -100$, $S_n = -532$; **8)** $n = 2$, $a_1 = 8$ ili $n = 9$, $a_1 = -6$; **9)** $d = 11$, $a_1 = -65$; **10)** $a_1 = 120$, $a_n = 60$.

38. Iz $6a_{14} = 186$ i $6a_{12} = 156$ slijedi $a_{14} = 31$ te $a_{12} = 26$. Konačno, $a_{14} - a_{12} = 2d = 5$ pa je $d = 2.5$.

39. $a_1 + a_6 + a_{11} = 36$. Uvrsti izraze za a_6 i a_{11} i usporedi s izrazom za S_n.

40. Iz $S_n = 750 = \frac{n}{2}[2 \cdot 64 + (n-1)(-2)]$ dobiva se kvadratna jednadžba $n^2 - 65n + 750 = 0$ te je $n_1 = 15$, $n_2 = 50$.

41. $\frac{a_2 + a_{2n}}{2} \cdot n = 126 \implies n = 6$.

42. $S_p = \frac{n}{2}(a_2 + a_{2n})$, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_{2n-1})$. $S_p - S_n = \frac{n}{2}(a_2 - a_1 + a_{2n} - a_{2n-1}) = \frac{n}{2}(d+d) = nd = 6$. Dalje iz $a_{2n} - a_1 = 10.5$, dobije se $(2n-1)d = 10.5$. Tako imamo $12 - d = 10.5$ te je $d = 1.5$, $n = 4$.

43. $a_m = \frac{1}{2}(A+B)$, $a_n = \frac{m}{2n}(B-A)$.

44. Treba dokazati: $2a_n = a_{n-m} + a_{n+m}$. Izračunaj $a_{n-m} + a_{n+m}$.

45. $a_m + a_n = 2a_1 + (m+n-2)d$, $a_p + a_q = 2a_1 + (p+q-2)d$, dalje zaključiti!

46. Tvrdnja slijedi direktno iz izraza $S_n = a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

47. Za svaki aritmetički niz vrijedi: ako je $k + m = r + s$, onda je $a_k + a_m = a_r + a_s$ (vidi prethodni zadatak). Zbog toga imamo: $a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12} = 2a_{10} = 112$. I dalje: $(a_1 + a_{19}) + (a_2 + a_{18}) + \ldots + (a_9 + a_{11}) + a_{10} = 112 \cdot 9 + 56 = 1064$.

48. $S_{20} = 100$. Naime, $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = a_1 + a_2 + a_{19} + a_{20} = a_3 + a_4 + a_{17} + a_{18} = a_5 + a_7 + a_{14} + a_{16} = a_8 + a_{10} + a_{11} + a_{13} = 20$.

49. Posljednju jednakost zapišemo kao $(a_1 + a_{16}) + (a_4 + a_{13}) + (a_7 + a_{10}) = 147$. U njoj su tri jednaka pribrojnika te je $a_1 + a_{16} = a_6 + a_{11} = 49$. Stoga je $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} = 98$.

50. Imamo redom:
$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = 9 \cdot \frac{a_1 + 2d + a_9 - 2d}{2} = 9 \cdot \frac{a_3 + a_7}{2} = 45.$$

51. $x = 7$.

52. **1)** $x = 29$; **2)** $x = 47$; **3)** $x = 19$; **4)** $x = 7$.

53. Iz $a_n = 105 + (n-1)(-7) > 0$ dobije se $n < 16$. Niz ima 15 pozitivnih članova. Zbroj 31 člana jednak je nuli.

54. Radi se o aritmetičkom nizu 1, 7, 13, 19,..., te je $S_{200} = 119\,600$.

55. $a_1 = -\frac{41}{2}$, $d = 1$.

56. 4, 6, 8, 10.

57. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

58. Iz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 68$ i $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = -36$. Zbog $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$ imamo $4a_1 + 4a_n = 32$, odnosno $a_1 + a_n = 8$. Dalje je $68 = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, odakle se dobije $n = 17$, a zatim $a_1 = 20$, $d = -2$.

59. $S_{13} = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) = 13(a_1 + 6d) = 13 \cdot 15 = 195$.

60.
$$\begin{aligned} A_n &= n + [n + (2n-1)] + [n + 2(2n-1)] \\ &\quad + \ldots + [n + 39(2n-1)] \\ &= 40n + \frac{40 \cdot 39}{2}(2n-1) = 40^2 n - 20 \cdot 39; \end{aligned}$$
$$\sum_{n=1}^{10} A_n = 40^2 \sum_{n=1}^{10} n - 10 \cdot 20 \cdot 39 = 80\,200.$$

61. -744.

62. To je aritmetički niz $a_1 = 2$, $d = 1$. $S_{100} = 5\,150$.

63. Iz sustava $a_1 + (n-1)d = \frac{1}{m}$, $a_1 + (m-1)d = \frac{1}{n}$ nalazimo $d = \frac{1}{mn}$, $a_1 = \frac{1}{mn}$. Zatim je $S_{mn} = \frac{mn}{2}(2a_1 + (mn-1)d) = \frac{mn+1}{2}$.

64. Iz sustava $a_m = a_1 + (m-1)d = n$, $a_n = a_1 + (n-1)d = m$ dobije se $d = -1$, $a_1 = m + n - 1$. Sada je $S_{m+n} = \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$.

65. a_6 i a_{33}.

66. a, $3a$, $5a$, $7a$,....

67. Zajednički članovi niza čine novi aritmetički niz s prvim članom $a_1 = 21$ te razlikom $d = 20$ (najmanji zajednički višekratnik od 4 i 5). $S_{100} = 101\,100$.

68. 300.

69. $a_1 = S_1 = 5$, $S_2 = 5 + a_2 = 4 + 12$, $a_2 = 11$. Dakle $d = 6$ te je $a_n = 6n - 1$.

70. $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 4(n+1)^2 - 3(n+1) - (4n^2 - 3n) = 8n + 1$; $a_n = 8(n-1) + 1 = 8n - 7$.

71. $a_{10} = S_{10} - S_9 = 4 \cdot 10^2 - 4 \cdot 9^2 = 76$.

72. Iz $S_n = 3n^2$ dobije se niz 3, 9, 15,..., s općim članom $a_n = 6n - 3$.

73. Prvi uvjet daje $a_1+4d=18$, a drugi, za $n=1$, $a_1=\frac{1}{4}(a_1+a_1+d)$, odakle $d=2a_1$. Zaključujemo $a_1=2$ i $d=4$.

74. $d=\frac{1}{20}$.

75. To bi bio niz 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35 ili obrnut padajući niz.

76. 18 brojeva.

Rješenja 4.3

6. $4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$.

7. **1)** $\dfrac{1}{4}$; **2)** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; **3)** $3\cdot\sqrt[3]{9}$; **4)** $\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

8. **1)** $a_{10}=2^{10}$ ili $a_{10}=-2^{10}$; **2)** $a_6=\dfrac{32}{243}$;
3) $a_9=32$; **4)** $q=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $a_4=\pm\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$;
5) $a_4=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3$; **6)** $a_{11}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[6]{2}}$.

10. $a_{20}=|q|^{20}=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|^{20}=1$.

11. $a_{20}=(1-i\sqrt{3})\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{19}$, $|a_{20}|=2$.

12. **1)** $x=5$, $a_1=10$, $q=2$;
2) $x=-95$, $a_1=-90$, $q=-\dfrac{4}{3}$.

13. Iz bikvadratne jednadžbe $x^4-x^2-72=0$ dobijemo $x^2=9$ pa imamo niz 1, 9, 81.

14. $x=6$, $a_1=\dfrac{1}{8}$, $q=2$.

15. Te brojeve najprije zapišemo kao $\log_2 3$, $\log_2 a$, $\dfrac{1}{\log_2 3}$, a potom postavimo uvjet $\log_2^2 a=\log_2 3\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=1$. Odatle je $a=2$ ili $a=\frac{1}{2}$.

16. **1)** $a_1=7$, $q=-4$ ili $a_1=-\frac{35}{3}$, $q=4$;
2) $a_1=3$, $q=2$;
3) $a_1=-5$, $q=2$ ili $a_1=-5$, $q=-2$
4) $a_1=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$;
5) $a_1=1$, $q=5$ ili $a_1=25$, $q=\frac{1}{5}$
6) $a_1=10$, $q=2$ ili $a_1=40$, $q=\frac{1}{2}$

17. Kako su zadani prvi i drugi član, količnik niza je jednak njihovu omjeru, $q=3$. Nadalje, iz jednadžbe $2\,916=a_1\cdot q^{n-1}=4\cdot 3^{q-1}$ slijedi $q^{n-1}=729=27^2=3^6$. Dakle je $n=7$, u tom je nizu sedam članova.

18. $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ \ldots$ ili $-\frac{5}{4},\ \frac{15}{4},\ -\frac{45}{4},\ \frac{135}{4},\ \ldots$

19. $1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256$; $1,\ -4,\ 16,\ -64,\ 256$.

20. $q=\pm 3$

21. Od 14. člana.

23. Iz $a_1(1+q+q^2)=28$, $a_1q^3(1+q+q^2)=3.5$ slijedi $q^3=\frac{1}{8}$ te je $q=\frac{1}{2}$ i $a_1=16$. $a_8=\frac{1}{8}$.

24. Iz prve jednadžbe sustava $a_1(q^2+q+1)=74$, $a_1^2(q^4+q^2+1)=1924$, dobijemo $a_1=\dfrac{74}{q^2+q+1}$. Uvrstimo to u drugu jednadžbu: $\dfrac{37(1-q+q^2)}{q^2+q+1}=13$. Dobivamo brojeve 32, 24, 18. Tako su rješenja dva niza:
1) $32,\ 24,\ 18,\ \ldots$; **2)** $18,\ 24,\ 32,\ \ldots$

25. **1)** $n=9$, $S_n=2044$;
2) $q=\pm\sqrt{3}$, $S_n=2(27\sqrt{3}\mp 1)(\sqrt{3}\pm 1)$;
3) $n=6$, $q=2$; **4)** $a_n=32$, $S_n=62$;
5) $n=9$, $a_n=2048$; **6)** $a_1=2$, $S_n=254$.

26. **1)** 3, 6, 12; **2)** 12, 6, 3. Još dva rješenja dobit će se iz jednadžbe $2q^2+9q+2=0$.

27. Niz zapisujemo $\dfrac{x}{q}$, x, xq, ... te je iz prvog uvjeta odmah $x=4$. Dva su rješenja: niz 8, 4, 2,... i niz 2, 4, 8,....

28. $a_1=2$, $q=3$ ili $a_1=\frac{26}{7}$, $q=-3$.

29. Kako je $b_3\cdot b_9=(b_1q^5)^2=A$, a umnožak prvih 11 članova iznosi $(b_1q^5)^{11}$, taj je umnožak jednak $A^5\sqrt{A}$.

30. Slično kao u prethodnom zadatku: $a_4\cdot a_5=a_1^2q^7=B$, te je $a_1\cdot a_2\cdots a_8=(a_1^2q^7)^4=B^4$.

31. Neka su redom a, b, c uzastopni članovi geometrijskog niza. Tada je $b^2=ac$. No trokut je pravokutan pa iz $a^2+b^2=c^2$ slijedi $a^2+ac-c^2=0$. Nakon dijeljenja jednadžbe s c^2, te uz $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ dobijemo jednadžbu $\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$. Slijedi $\alpha=38^\circ 10' 22''$.

32. Nakon prvog koraka u posudi je $10 - 10 \cdot \frac{1}{11} = \frac{10^2}{11}$ litara alkohola. Nakon drugog koraka $\frac{10^2}{11} - \frac{10^2}{11} \cdot \frac{1}{11} = \frac{10^3}{11^2}$ litara. Indukcijom provjeri da je nakon n-tog koraka u posudi preostalo $\frac{10^{n+1}}{11^n}$ litara alkohola. To je geometrijski niz s prvim članom 10 i kvocijentom $q = \frac{10}{11}$.

33. Imamo nizove: **1)** $3, 6, 12, 24, \ldots S_9 = 1533$; **2)** $-3, 6, -12, 24, \ldots S_9 = -513$; **3)** $48, 24, 12, 6, \ldots S_9 = \frac{1533}{16}$; **4)** $-48, 24, -12, 6, \ldots S_9 = -\frac{513}{16}$. Naime, iz sustava $a_2 + a_4 = 30$, $a_2 a_4 = 144$ dobije se kvadratna jednadžba s rješenjima **1)** $a_2 = 24$, $a_4 = 6$ ili **2)** $a_2 = 6$, $a_4 = 24$.

34. $S_{12} = 2(2^{12} - 1)$, imamo dva niza **1)** $2, 4, 8, 16, \ldots$; **2)** $-6, 12, -24, 48, \ldots$, ali za oba je slučaja zbroj S_{12} jednak.

35. Iz $a_5 = a_1 \cdot q^4$ slijedi $q = 3$. Iz $1820 = 5\frac{3^n - 1}{3 - 1}$ dobivamo $n = 6$.

36. $S_4 = 40$

37. Zadano je: $a_1(1 + q + q^2) = 40$, $a_1 q^3(1 + q + q^2) = 20$, odakle se dobije $q^3 = \frac{1}{2}$. Sada imamo: $S_9 = S_6 + a_1 q^6(1 + q + q^2) = 60 + 20 \cdot \frac{1}{2} = 70$.

38. Iz $S_{11} = \frac{1}{5}(S_{22} - S_{11})$ dobiva se $6S_{11} = S_{22}$. Odatle imamo kvadratnu jednadžbu $q^{22} - 6q^{11} + 5 = 0$ s rješenjem $q^{11} = 5$ ($q^{11} = 1$ daje $q = 1$, što ne odgovara). Sada tražimo omjer $\frac{a_{11}}{a_1} = q^{10} = (\sqrt[11]{5})^{10}$, $a_{11} : a_1 = 5^{\frac{10}{11}}$

39. Neka je broj članova niza jednak $2k$. Tada je $S_{2k} = \frac{a_1(1 - q^{2k})}{1 - q}$. Prema uvjetu zadatka imamo $\frac{a_1(1 - q^{2k})}{1 - q} = 3\frac{a_1 q(1 - q^{2k})}{1 - q^2}$, odakle $1 = \frac{3q}{1 + q}$ te $q = \frac{1}{2}$.

40. Iz uvjeta zadatka dobivamo jednakost $a_1 \frac{q^{2n} - 1}{q - 1} = 3a_1 \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}$, odakle je $q = 2$.

41. Izračunavamo redom $S_1 = a_1 = 3$, zatim $S_2 = a_1 + a_2 = 9$, odakle je $a_2 = 6$. Kako je $a_2 = a_1 q$, slijedi $q = 2$. Sada imamo $a_5 = a_1 q^4 = 48$.

42. Ako je $x = 1$, zbroj iznosi $4n$. Ako je $x = -1$, zbroj iznosi $4\lfloor n/2 \rfloor$. Za $x \neq \pm 1$ računamo ovako: nakon kvadriranja svakog pribrojnika, dobivamo zbroj $x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots + \frac{1}{x^{2n}} + 2n$ te je taj zbroj jednak

$$\frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n}(x^2 - 1)} + 2n = \frac{(x^{2n} - 1)(x^{2n+2} + 1)}{x^{2n}(x^2 - 1)} + 2n.$$

43. Opći član danog niza jednak je $a_k = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Zbroj n članova ovog niza je $S_n = (2-1) + (2^2-1) + (2^3-1) + \ldots + (2^n-1) = 2^{n+1} - n - 2$.

44. Opći član niza je $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$. Zbroj prvih n članova ovog niza je $\frac{10}{9} \cdot \frac{10^n - 1}{9} - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$.

45. Neka je dan geometrijski niz $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \ldots$ Niz njegovih kvadrata jest niz $a_1^2, a_1^2 q^2, a_1^2 q^4, \ldots$. Omjer člana ovog niza i njemu prethodnog člana je $a_1^2 q^{2n} : a_1^2 q^{2n-2} = q^2$ pa je i ovaj niz geometrijski. Kvocijent niza jednak je q^2, a prvi član je a_1^2.

46. Iz $a_{m+n} = A$, $a_{m-n} = B$ dobiva se sustav jednadžbi $a_1 q^{m+n-1} = A$ i $a_1 q^{m-n-1} = B$. Pomnožimo li te dvije jednadžbe, dobit ćemo $(a_1 q^{m-1})^2 = AB$, a odatle izravno $a_m = \sqrt{AB}$. Ako iste te dvije jednadžbe podijelimo, imat ćemo $q^{2n} = \frac{A}{B}$. Nadalje, iz prve jednadžbe slijedi $a_1 q^{n-1} \cdot q^m = a_n \cdot q^m = A$, te je $a_n = \frac{A}{q^m} = A \cdot \sqrt[2n]{\left(\frac{B}{A}\right)^m}$.

47. Zapišimo: $a = a_1q^{n-1}$, $b = a_1q^{m-1}$, $c = a_1q^{k-1}$. Odatle je $\frac{a}{c} = q^{n-k}$, $\frac{b}{a} = q^{m-n}$, $\frac{c}{b} = q^{k-m}$. Potenciramo li prvu od ovih triju jednakosti sa m, drugu sa k, treću sa n i pomnožimo li tako dobivene nove jednakosti, dobit ćemo $\left(\frac{a}{c}\right)^m \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^n = 1$, a odatle izravno proistječe tvrdnja iz zadatka.

48. Dokaz provedi izravno – uvrštavanjem.

49. Umnožak $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdots a_{16}$ možemo zapisati u obliku $(a_2a_{16}) \cdot (a_4a_{14}) \cdot (a_6a_{12}) \cdot (a_8a_{10})$, gdje imamo četiri jednaka faktora (vidi prethodni zadatak) te je svaki od tih faktora jednak 2. No, $a_9^2 = a_8 \cdot a_{10}$ te je $a_9 = \sqrt{2}$.

50. $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_7 = a_4^7 = 3^7 = 2\,187$.

51. Iz $\log_2(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_9) = \log_2 a_5^9 = 9 \cdot \log_2 a_5 = 3$. Slijedi $a_5 = \sqrt[3]{2}$.

Dalje je $a_1 \cdot a_9 = a_5^2 = \sqrt[3]{4}$.

52. Iz $\log(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_7) = \log a_4^7 = 7 \cdot \log a_4 = \frac{7}{4}$. Odatle je $a_4 = \sqrt[4]{10}$. Konačno je $a_1 \cdot a_7 = a_4^2 = \sqrt{10}$.

53. Brojevi a, b, 12 uzastopni su članovi geometrijskog niza, a brojevi a, b, 9 aritmetičkog. Te dvije činjenice možemo zapisati u obliku sustava jednadžbi $b^2 = 12a$ i $a + 9 = 2b$. Za rješenje imamo dva geometrijska niza: 3, 6, 12 ili 27, 18, 12.

54. Iz uvjeta $a + b + c = 21$ i $2b = a + c$ odmah se dobije $b = 7$. Drugi uvjet možemo zapisati u obliku jednadžbe $ac + a = 36$, što uz $a + c = 14$ daje kvadratnu jednadžbu $a^2 - 15a + 36 = 0$. Imamo dva rješenja: 12, 7, 2 ili 3, 7, 11.

55. Imamo niz 3, 5, 7, ...; $S_{10} = 120$.

56. 4, 8, 16 ili 16, 8, 4

57. Aritmetički je niz 2, 10, 18, ..., a geometrijski 2, 6, 18, ...

58. 2, 8, 32 ili trivijalno rješenje 14, 14, 14.

59. **1)** $a_1 = 7$, $q = 3$, $a_7 = 5103$; **2)** $a_1 = 63$, $q = \frac{1}{3}$, $a_7 = \frac{7}{81}$.

60. Označimo brojeve s a, $a+3d$, $a+24d$. Tada je $3a+27d = 114$ i $(a+3d)^2 = a(a+24d)$; a odatle se dobiju rješenja: **1)** 38, 38, 38 **2)** 2, 14, 98

61. Neka su to brojevi a, b, c, d. Imamo četiri jednadžbe što proistječu iz uvjeta zadatka: $b^2 = ac$, $b + d = 2c$, $a + d = 32$, $b + c = 24$. Nizovi su: **1)** 32, 16, 8, 0; **2)** 2, 6, 18, 30.

62. Zapišimo ta četiri broja kao: a, aq, aq^2, $2aq^2 - aq$, te je $a(1 - q + 2q^2) = 14$, $aq(1 + q^2) = 12$. Dijeljenjem ovih jednadžbi dobit će se $5q^2 - 13q + 6 = 0$ te imamo dva rješenja: **1)** 2, 4, 8, 12; **2)** $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$.

63. Neka su a, aq, aq^2 ta tri broja. Imamo sustav jednadžbi: $2(aq + 8) = a + aq^2$, $(aq + 8)^2 = a(aq^2 + 64)$, odakle se dobiju rješenja: **1)** 4, 12, 36; **2)** $\frac{4}{9}$, $-\frac{20}{9}$, $\frac{100}{9}$.

64. 1; $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$.

65. Evo traženih geometrijskih nizova: **1)** 5, 10, 20, 40, ...; **2)** 5, −10, 20, −40, ...; **3)** 5, 5, 5, ...; **4)** 5, −5, 5, −5, ...

66. Aritmetički je niz 12, 14, 16.

67. 24, 27, 30, ... ili 24, 24, 24, ...

68. 27

Rješenja 4.4

1. Treba pokazati da za svaki pozitivan broj ε, $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takav da je za sve $n > n_0$ ispunjeno $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$. No, $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ za svaki $n > n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

2. Za $n > 2998$.

4. Promotrimo razliku $|x_n - (-2)| = \left|\dfrac{3-2n}{n+1} + 2\right| = \left|\dfrac{5}{n+1}\right| = \dfrac{5}{n+1}$. Ova je razlika manja od ε čim je $n + 1 > \dfrac{5}{\varepsilon}$, odnosno, $n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 1$.

9. Vrijedi $\dfrac{1}{n^k} \to 0$ kad $n \to \infty$ za svaki prirodni k. U izrazima s racionalnom funkcijom podijeli brojnik i nazivnik najvećom potencijom broja n.
1) 1; **2)** −3; **3)** $\frac{3}{5}$; **4)** −1; **5)** 0; **6)** $-\frac{1}{2}$; **7)** $\frac{15}{7}$; **8)** 1; **9)** 0; **10)** 0.

10. **1)** $\frac{2}{3}$; **2)** $\frac{3}{2}$; **3)** 1; **4)** 0; **5)** −1; **6)** $\frac{1}{4}$; **7)** 1.

11. **1)** 1; **2)** 1; **3)** 1; **4)** $1/\sqrt[6]{2}$; **5)** 0; **6)** $\frac{1}{2}$; **7)** 0; **8)** 0; **9)** 0; **10)** 3.

12. **1)** $\frac{1}{2}$; **2)** -1; **3)** $\frac{2}{3}$; **4)** $\frac{1}{2}$; **5)** 0.

13. **1)** 1; **2)** $\frac{1}{3}$; **3)** 0; **4)** 0; **5)** 2; **6)** 0; **7)** $\frac{1}{2}$; **8)** $-\frac{2}{5}$; **9)** 0; **10)** 0; **11)** $\frac{31}{33}$.

14. **1)** 0; **2)** 0; **3)** 0; **4)** $\frac{1}{2}$; **5)** 0; **6)** 0.

Rješenja 4.5

1. Od člana a_6.

2. Napišemo li opći član u obliku $a_n = 2 - \dfrac{3}{n}$, vidimo da je niz monotono rastući. Najmanji je član $a_1 = -1$. Možemo provjeriti da vrijedi $a_{n+1} - a_n = \dfrac{3}{n(n+1)}$ pa je $a_{n+1} > a_n$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

3. Od člana a_{20}.

4. Provjeri nejednakost $x_n < x_{n+1}$.

5. **1)** da; **2)** da; **3)** da; **4)** ne; **5)** da; **6)** ne.

6. Nijedan. To je niz 2, 0, 0, 2, 6, 12,... i dalje taj niz raste.

7. 8 članova.

8. Primijetimo da je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Primjenjujući AG-nejednakost imamo

$$a_n = n + \frac{100}{n} \geqslant 2\sqrt{n \cdot \frac{100}{n}} = 20.$$

Kako je $a_{10} = 20$, stoga je a_{10} najmanji član.

9. Promotrimo funkciju $f(n) = a_n = \dfrac{3n-18}{3n-19} = 1 + \dfrac{1}{3n-19}$, $n \in \mathbf{N}$. Vrijedi $f(1) = \dfrac{15}{16}$ i niz zatim pada sve dok je $3n - 19 < 0$, dakle za $n \leqslant 6$. Pritom je $a_6 = 0$. Međutim, vrijedi $a_7 = \dfrac{3}{2}$ i za $3n - 19 > 0$ nazivnik je pozitivan i niz dalje pada težeći prema 1. Najmanji član niza je a_6, a najveći a_7.

10. Funkcija $f(n) = \log_3 n$ je monotono rastuća. Zbog toga će funkcija $f(n) = \log_3^2 n - 3\log_3 n$ imati najmanju vrijednost kada ovaj polinom drugog stupnja u $\log_3 n$ bude imao najmanju vrijednost, što se događa za $\log_3 n = \frac{3}{2}$ ili $n = \sqrt{27}$. No, kako n mora biti cijeli broj, stoga se minimum postiže u nekom od susjednih cijelih brojeva, dakle, za $n = 5$ ili za $n = 6$. Direktnom provjerom vidimo da je to član a_5.

11. Najveći član je $a_3 = \dfrac{5}{64}$.

12. Niz nema najmanjeg člana. Najveći član je $a_1 = \frac{3}{2}$ i nakon toga niz monotono pada, ali nikad ispod $\frac{1}{2}$.

13. Ispišimo prvih nekoliko članova niza: 6, 2, -2, 4, 10, 6,.... Najmanji član niza je $a_3 = -2$. Primijeti da porastom rednog broja pribrojnik $5\sin\dfrac{n\pi}{2}$ sve manje utječe na veličinu člana u nizu.

14. $n_0 = 300$.

15. **1)** $n_0 = 9$; **2)** $n_0 = 99$; **3)** $n_0 = 999$.

16. **1)** $a_n = 1 - \dfrac{3}{n+1} < 1$. No niz je rastući te je stoga $a_1 = -\dfrac{1}{2}$ najmanji član niza. Dakle, $-\dfrac{1}{2} \leqslant a_n < 1$. **2)** $3 < a_n \leqslant 4$. **3)** $a_n = 2 - \dfrac{5}{n^2+2} < 2$; $a_{n+1} - a_n > 0$ za sve $n \in \mathbf{N}$ te je niz monotono rastući i njegov je najmanji član $a_1 = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{3} \leqslant a_n < 2$. **4)** Funkcija $f(x) = x^3$ preslikava segment $[\frac{1}{3}, 2]$ u segment $[\frac{1}{27}, 8]$, jer je to rastuća funkcija. Općenito, ako je (a_n) omeđen niz, onda je i niz (a_n^k) omeđen za svaki $k \in \mathbf{N}$. **5)** $-\dfrac{1}{4} \leqslant a_n < 2$. **6)** Za svaki $n > 1$ vrijedi: $\dfrac{n-1}{n+1} < \dfrac{n+\sin n}{n+\cos n} < \dfrac{n+1}{n-1}$ (zašto?). Stoga je niz uklopljen između dvaju omeđenih nizova pa je i sam omeđen.

17. **1)** $0 < a_n < \dfrac{3}{2}$ (niz je monotono padajući). **3)** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, niz monotono pada, a svi članovi su mu pozitivni brojevi. **4)** $0 < a_n < 1$.

18. **1)** Vrijedi $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{2n-1} \leqslant 1$.

2) Vrijedi $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n} + 1 \leqslant 2$.

19. **1)** ne; **2)** ne; **3)** ne; **4)** da; **5)** ne; **6)** da.

20. Kako je $a_n > 0$, za sve $n \in \mathbf{N}$, niz je omeđen odozdo. Dalje

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{3(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^{3n}} = \frac{1000}{n+1}.$$

Odatle zaključujemo: $a_{n+1} \geqslant a_n$ ako je $n+1 \leqslant 1000$; niz raste samo za $1 \leqslant n \leqslant 999$. Za $n \geqslant 1000$ je $a_n < a_{999}$ pa je niz omeđen i odozgo.

22. **1)** Indukcijom. Članovi niza su pozitivni. Tvrdimo: $a_n < 1$. Vrijedi $a_1 = \frac{3}{4} < 1$. Ako je $a_n < 1$, onda imamo $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3}{4} < \dfrac{1+3}{4} = 1$.
2) Niz je konstantan.
3) Indukcijom pokaži $0 < a_n < 1$ za $n > 1$.

23. $a_n = 4 - \dfrac{3}{n+2}$, te je lako zaključiti da je $[3, 4\rangle$ jedan takav interval.

25. **1)** da, $[0, 1\rangle$; **2)** ne; **3)** ne; **4)** da, $\langle -1, 1\rangle$; **5)** da, $\langle 0, 1]$; **6)** da, $[-1, \frac{1}{2}]$.

27. Vrijedi $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Da je niz rastući, provjeravamo indukcijom: $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$. Iz $a_n > a_{n-1}$ slijedi $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{2a_{n-1}} = a_n$. Omeđenost $a_n < 2$ također provjeravamo indukcijom. Niz je rastući i omeđen, pa ima limes. Neka je to a. Uz $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ za $n \to \infty$ slijedi $a = \sqrt{2a}$, odakle je $a = 2$.

28. Pokaži da je niz rastući, omeđen brojem 1. Omeđenost se pokazuje indukcijom.

Rješenja 4.6

1. **1)** 4; **2)** 12; **3)** 6; **4)** $2\sqrt{2}$; **5)** $3\sqrt{2}+4$; **6)** $\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+5)$; **7)** $6+4\sqrt{2}$; **8)** $\frac{1}{2}(7+5\sqrt{2})$.

2. **1)** 2 **2)** $2(2-\sqrt{3})$ **3)** $\dfrac{2}{17}(\sqrt{2}+6)$ **4)** $4(2+\sqrt{3})$

3. **1)** $\frac{9}{2}$; **2)** 20; **3)** $3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; **4)** $\frac{1}{2}(7+5\sqrt{2})$.

4. **1)** $\frac{1}{22}$; **2)** $\frac{7}{33}$; **3)** 2; **4)** $\frac{5}{14}$.

5. $\dfrac{4x}{\frac{61}{9}+\frac{5}{9}-\frac{34}{75}} = \dfrac{10}{3}$, $x = 5\dfrac{11}{15}$.

6. $x = \frac{44}{45}$.

7. **1)** 2; **2)** $\sqrt[3]{45}$; **3)** $\sqrt[3]{36}$.

8. **1)** $x = \dfrac{3}{5}$; **2)** $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$; **3)** $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \ldots$; **4)** $x = 10$; **5)** $x = 100$; **6)** $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; **7)** $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

9. **1)** $x = \dfrac{1}{3}$; **2)** $x = \pm 0.8$; **3)** $x = -4$.

14. 5.

15. $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$.

16. $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$.

17. $q^6 = \dfrac{1}{8}$ $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

18. $81, 54, 36, 24, 16, \ldots$.

19. $a\pi$.

20. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

21. $\dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

22. $S = a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{4}a^2 + \ldots = 2a^2$.

23. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16} + \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{64} + \ldots = a^2\sqrt{3}$.

24. $P = a^2 + \dfrac{5}{9}a^2 + \dfrac{25}{81}a^2 + \ldots = \dfrac{9}{4}a^2$.

25. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36} + \ldots = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

26. Veliki trokut ima površinu $P = 234\,\text{cm}^2$. Ostali su mu slični, s koeficijentima sličnosti redom $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, itd. Tako imamo niz površina P, $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{16}P, \ldots$ čiji je zbroj jednak $S = \frac{4}{3}P = 312\,\text{cm}^2$.

27. $S_t = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$, $S_k = \dfrac{a^2\pi}{9}$.

28. $S_n = 200\pi\,\text{cm}^2$.

Rješenja 4.7

1. **1)** 66 911 kn; **2)** 67 195 kn; **3)** 67 442 kn.

3. Iz $4000 = 2500 \cdot 1.054^n$ slijedi $n = 8.94$. Treba proći 9 godina.

4. 12 godina.

5. **1)** $C_5 = 16\,058.7$; **2)** $p = 4.45\ \%$; **3)** $n = 8$; **4)** $C = 16\,416.7$.

6. Neka je p mjesečna kamatna stopa. Iz jednadžbe $(1+p)^{12} = 1.075$ slijedi $p = \sqrt[12]{1.075} - 1 = 0.6045\ \%$.

7. Iz $C_0 \cdot 1.08^5 = 350\,000$ slijedi $C_0 = 238\,204$ pa je $C_3 = 300\,068$ kn.

8. 6 796.66 kn

9. Po isteku roka Josip raspolaže iznosom od $1000 \cdot 1.06 \cdot \dfrac{1.06^{30} - 1}{1.06 - 1} = 83\,801.67$ kn. Godišnji iznos kamata na ovu svotu je 5.028 kn, što daje mjesečnu rentu od 419 kn.

10. Iz $88\,000 = 83\,000 \cdot e^{\frac{25p}{100}}$ slijedi $p = 0.234\ \%$. Odgovor je $91\,143$.

11. Iz $e^{\frac{p}{100}} = 1.025$ slijedi $p = 2.469\ \%$ pa je $C_{10} = C_0 \cdot e^{\frac{10 \cdot p}{100}} = 41\,603$.

Rješenja TOČNO-NETOČNO pitalica

Str. 14.		Str. 58.		Str. 167.		Str. 182.		Str. 190.	
1.	N	1.	T	1.	N	1.	T	1.	T
2.	T	2.	T	2.	N	2.	N	2.	N
3.	N	3.	T	3.	N	3.	N	3.	N
4.	N	4.	N	4.	T	4.	T	4.	T
5.	T	5.	N	5.	T	5.	T	5.	N
6.	N	6.	N	6.	N	6.	N	6.	N
7.	N	7.	N			7.	N	7.	N
8.	T	8.	N					8.	N
9.	T	9.	T						

Kazalo pojmova

Zagreb, svibanj 2014.